

# Přibližná linearizace modelu kyvadla

---

24.2.2018 9:47 - verze 4.0 2018

## Obsah

Opakování kalkulu - Taylorův rozvoj funkce.....	2
Nelineární stavový model a jeho přibližná linearizace .....	4
Nelineární model vstup-výstup a jeho přibližná linearizace .....	7
Nelineární model vstup-výstup jednoduchého kyvadla a jeho přibližné linearizace .....	10
Nelineární stavový model jednoduchého kyvadla a jeho přibližné linearizace .....	14
Trochu obecnější nelineární model vstup-výstup a jeho přibližná linearizace .....	17

## Opakování kalkulu - Taylorův rozvoj funkce

Taylorův rozvoj nekonečně diferencovatelné funkce  $f(x)$  reálné proměnné  $x$  v okolí bodu  $x_p$ , (neboli Taylorova řada této funkce v bodě  $x = x_p + \Delta x$ ) je

$$f(x_p + \Delta x) = f(x_p) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_p} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x=x_p} (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x=x_p} (\Delta x)^3 + \dots$$

Je-li  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  vektorová funkce vektorové proměnné  $\mathbf{x}$ , taková, že všechny její parciální derivace všech řádů existují, pak její Taylorův rozvoj v okolí bodu  $\mathbf{x}_p$ , (neboli Taylorova řada této funkce v bodě  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \Delta \mathbf{x}$ ) je nekonečným součtem totálních diferenciálů

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_p + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_p) + \frac{1}{1!} \mathbf{D}^1 \mathbf{f} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p} + \frac{1}{2!} \mathbf{D}^2 \mathbf{f} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p} + \dots$$

kde  $\mathbf{D}^1 \mathbf{f}$  je totální diferenciál 1. řádu funkce  $\mathbf{f}$  definovaný jako

$$\mathbf{D}^1 \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \Delta x_n = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

kde  $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$  se nazývá **Jacobiho matice** a po vyčíslení v bodě  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p$  je

$$\mathbf{D}^1 \mathbf{f} \Big|_{\mathbf{x}_p, \Delta \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \Big|_{x_{p,1}} \Delta x_1 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \Big|_{x_{p,2}} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \Big|_{x_{p,n}} \Delta x_n = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_p} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

Analogicky  $\mathbf{D}^2\mathbf{f}$  je totální diferenciál 2. řádu funkce  $\mathbf{f}$  je definovaný jako

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2\mathbf{f} &= \mathbf{D}^1(\mathbf{D}^1\mathbf{f}) = \mathbf{D}^1\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_n}\Delta x_n\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_n}\Delta x_n\right)\Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_n}\Delta x_n\right)\Delta x_2 + \\ &\quad \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_n}\Delta x_n\right)\Delta x_n\end{aligned}$$

a bez použití tenzorů se nedá hezky kompaktně vyjádřit.

Pro jednotlivé složky (řádky)  $f_i$  funkce  $\mathbf{f}$  lze sice při vyjádření použít **Hessovu matici** složenou ze všech druhých parciálních derivací

$$\mathbf{H}(f_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

ale pro celou funkci je třeba

$$\mathbf{H}(\mathbf{f}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}(f_1) \\ \vdots \\ \mathbf{H}(f_n) \end{Bmatrix}$$

což je tenzor 3. řádu, tedy 3-D pole složené z Hessových matic. Druhý člen se jím kompaktně vyjádřit dá, ale jen použitím tenzorových operací.

V mnoha aplikacích Taylorova rozvoje se členy druhého a vyšších řádů zanedbávají. Lze to tak udělat, jen když jsou všechny ve srovnání s nultým a prvním členem malé. K tomu je potřeba, aby všechny byly malé příslušné parciální derivace, odchylky (menší než 1) a nejlépe obojí.

## Nelineární stavový model a jeho přibližná linearizace

Pro systém popsaný nelineárním stavovým modelem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\end{aligned}\tag{1}$$

vybereme nějaké nominální řešení (trajektorii), ve kterém chceme systém provozovat - například referenční trajektorie robota, limitní cyklus nebo, nejčastěji, ekvilibrium - a řekněme mu pracovní bod.

Označíme-li ho  $\mathbf{x}_p(t)$ ,  $\mathbf{u}_p(t)$ ,  $\mathbf{y}_p(t)$ , pak samozřejmě platí

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) \\ \mathbf{y}_p(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t))\end{aligned}\tag{2}$$

neboť je to řešení rovnic stavového modelu jako každé jiné.

Vyjádříme hodnoty veličin v okolí pracovního bodu pomocí odchylek jako

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t)\end{aligned}\tag{3}$$

a dosadíme je do nelineárních rovnic (1). Tím dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p(t) + \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t))\end{aligned}\tag{4}$$

Když rozvineme nelineární funkce na pravých stranách (4) v okolí pracovního bodu (!) v jejich Taylorovy řady, dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p(t) + \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) + \dots \\ \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) + \dots\end{aligned}\tag{5}$$

kde tečky nahrazují členy vyšších řádů. Zde

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p}, & \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p} \\ \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p}, & \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} & \dots \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p} \end{aligned} \quad (6)$$

jsou obecně Jacobiho matice vyčíslené v pracovním bodě  $\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t), \mathbf{y}_p(t)$ . V případě SISO

systemu, kdy jsou veličiny  $\mathbf{y}(t) = y(t)$  a  $\mathbf{u}(t) = u(t)$  skaláry, zůstává  $\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}$  čtvercovou maticí, ale

$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}$  je sloupcový vektor,  $\left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}$  je řádkový vektor a  $\left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}$  je skalár.

Využitím (2) se (5) zjednoduší na

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{u}(t) + \dots \\ \Delta \mathbf{y}(t) &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{u}(t) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Zde nezáleží na tom, zda pracovní bod je nebo není ekvilibríem a dále oba vztahy platí přesně.

K aproximaci dojde až nyní tím, že v (7) zanedbáme v obou rovnostech všechny členy řádů vyšších než 1. Tím dostaneme přibližné, ale lineární vztahy

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) &\cong \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{u}(t) \\ \Delta \mathbf{y}(t) &\cong \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

kteří aproximují původní nelineární rovnice (1).

Označíme-li Jacobiho matice v (8) obvyklými písmeny

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}, \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}, \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}, \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \quad (9)$$

dostáváme konečně namísto nelineárního modelu (1) jeho lineární odchylkovou aproximaci

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(t)$$

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\Delta \mathbf{u}(t)$$

Pozor: Tato aproximace je vždy vztažena k určitému pracovnímu bodu (nominálnímu řešení)  $\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t), \mathbf{y}_p(t)$  a platí jen pro malé odchylky od něj. Přirozeně platí tím přesněji, čím jsou odchylky menší a také čím jsou původní nelineární funkce v pracovním bodě „podobnější lineárním.“

## Nelineární model vstup-výstup a jeho přibližná linearizace

Podobně můžeme vyjít z nelineárního modelu vstup-výstup

$$\mathbf{D}(\mathbf{y}^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}(t), \mathbf{y}(t)) = \mathbf{N}(\mathbf{u}^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (11)$$

Opět vybereme nějaké nominální řešení (trajektorii), neboli pracovní bod, ve kterém chceme systém provozovat. Označíme-li ho  $\mathbf{y}_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t), \mathbf{u}_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$ , pak opět platí

$$\mathbf{D}(\mathbf{y}_p^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}_p(t), \mathbf{y}_p(t)) = \mathbf{N}(\mathbf{u}_p^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) \quad (12)$$

neboť je to řešení rovnic nelineárního modelu jako každé jiné.

Vyjádříme hodnoty veličin a jejich derivací v okolí pracovního bodu pomocí odchylek jako

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^{(n)}(t) &= \mathbf{y}_p^{(n)}(t) + \Delta\mathbf{y}^{(n)}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{u}^{(m)}(t) &= \mathbf{u}_p^{(m)}(t) + \Delta\mathbf{u}^{(m)}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

a dosadíme je do nelineárních rovnic (11). Tím dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{y}^{(n)}(t) + \Delta\mathbf{y}^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}(t) + \Delta\dot{\mathbf{y}}(t), \mathbf{y}(t) + \Delta\mathbf{y}(t)) &= \\ = \mathbf{N}(\mathbf{u}^{(m)}(t) + \Delta\mathbf{u}^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}(t) + \Delta\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t) + \Delta\mathbf{u}(t)) \end{aligned} \quad (14)$$

Když rozvineme nelineární funkce na levé a pravé straně (14) v okolí pracovního bodu (!) v jejich Taylorovy řady, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{D}|_p + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_p \Delta\mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \Big|_p \Delta\dot{\mathbf{y}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}} \Big|_p \Delta\mathbf{y}^{(n)} + \dots \\ = \mathbf{N}|_p + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_p \Delta\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_p \Delta\dot{\mathbf{u}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \Big|_p \Delta\mathbf{u}^{(m)} + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

kde tečky zastupují členy vyšších řádů. Zde

$$\mathbf{D}|_p = \mathbf{D}(y_p^{(n)}(t), \dots, \dot{y}_p(t), y_p(t)), \quad \mathbf{N}|_p = \mathbf{N}(u_p^{(m)}(t), \dots, \dot{u}_p(t), u_p(t))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_p &= \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial y_1} & \frac{\partial d_1}{\partial y_2} & \dots \\ \frac{\partial d_2}{\partial y_1} & \frac{\partial d_2}{\partial y_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p \\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}}, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \Big|_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial \dot{y}_1} & \frac{\partial d_1}{\partial \dot{y}_2} & \dots \\ \frac{\partial d_2}{\partial \dot{y}_1} & \frac{\partial d_2}{\partial \dot{y}_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p \\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}}, \quad \dots \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_p &= \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial u_1} & \frac{\partial n_1}{\partial u_2} & \dots \\ \frac{\partial n_2}{\partial u_1} & \frac{\partial n_2}{\partial u_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p \\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}}, \quad \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial \dot{u}_1} & \frac{\partial n_1}{\partial \dot{u}_2} & \dots \\ \frac{\partial n_2}{\partial \dot{u}_1} & \frac{\partial n_2}{\partial \dot{u}_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p \\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}}, \quad \dots \end{aligned} \quad (16)$$

jsou obecně Jacobiho matice vyčíslené v pracovním bodě  $\mathbf{y}_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t), \mathbf{u}_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$ .

V případě SISO systému, kdy jsou všechny veličiny  $\mathbf{y}_p(t) = y_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t) = y_p^{(n)}(t)$  a

$\mathbf{u}_p(t) = u_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t) = u_p^{(m)}(t)$  skaláry, také funkce  $\mathbf{D} = d, \mathbf{N} = n$  a jejich parciální derivace skalární.

Využitím (12) se (15) zjednoduší na

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_p \Delta \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \Big|_p \Delta \dot{\mathbf{y}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}} \Big|_p \Delta \mathbf{y}^{(n)} + \dots = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_p \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_p \Delta \dot{\mathbf{u}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \Big|_p \Delta \mathbf{u}^{(m)} + \dots \quad (17)$$

Zde opět nezáleží na tom, zda pracovní bod je nebo není ekvilibrím a dále oba vztahy platí přesně. K aproximaci dojde až nyní tím, že v (17) zanedbáme v obou rovnostech všechny členy řádů vyšších než 1. Tím dostaneme přibližné, ale lineární vztahy

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_p \Delta \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \Big|_p \Delta \dot{\mathbf{y}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}} \Big|_p \Delta \mathbf{y}^{(n)} \cong \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_p \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_p \Delta \dot{\mathbf{u}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \Big|_p \Delta \mathbf{u}^{(m)} \quad (18)$$

kteří aproximují původní nelineární rovnice (1).

Označíme-li Jacobiho matice v (18) obvyklými písmeny

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_p, \mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \Big|_p, \dots, \mathbf{a}_n = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}} \Big|_p, \quad \mathbf{b}_0 = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_p, \mathbf{b}_1 = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_p, \dots, \mathbf{b}_m = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \Big|_p \quad (19)$$



dostáváme konečně namísto nelineárního modelu (1) jeho lineární odchytkovou aproximaci

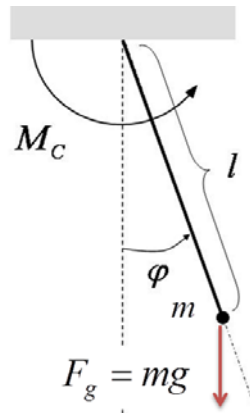
$$\mathbf{a}_0\Delta\mathbf{y} + \mathbf{a}_1\Delta\dot{\mathbf{y}} + \cdots + \mathbf{a}_n\Delta\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{b}_0\Delta\mathbf{u} + \mathbf{b}_1\Delta\dot{\mathbf{u}} + \cdots + \mathbf{b}_m\Delta\mathbf{u}^{(m)}$$

(20)

Pozor: Tato aproximace je vždy vztažena k určitému pracovnímu bodu (nominálnímu řešení)

$\mathbf{y}_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t), \mathbf{u}_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$  a platí jen pro malé odchylky od něj. Přirozeně platí tím přesněji, čím jsou odchylky menší a také čím jsou původní nelineární funkce v pracovním bodě „podobnější lineárním.“

Pro idealizované kyvadlo řízené momentem obr.



vychází z 2. Newtonova zákona pro rotaci<sup>1</sup> pohybová rovnice

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} &= \sum M \\ &= M_c - F_g l \sin \varphi \\ &= M_c - mgl \sin \varphi \end{aligned} \tag{21}$$

Dosadíme-li za moment setrvačnosti<sup>2</sup>  $J = ml^2$ , dostaneme po několika úpravách nelineární model vstup-výstup ve tvaru

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = M_c \tag{22}$$

Označíme-li  $y = \varphi, u = M_c$ , dostaneme z toho nelineární model vstup-výstup

$$ml^2\ddot{y} + mgl \sin y = u \tag{23}$$

Porovnáním s obecným modelem (11) vidíme, že jsou všechny veličiny a funkce skalární a že

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\ddot{y}(t), \dot{y}(t), y(t)) &= ml^2\ddot{y} + mgl \sin y \\ \mathbf{N}(u(t)) &= u \end{aligned} \tag{24}$$

<sup>1</sup> Působíme-li na těleso momentem síly, otáčí se s úhlovým zrychlením, které je podle 2. Newtonova zákona pro rotaci úměrné celkovému momentu a nepřímo úměrné momentu setrvačnosti.

Srovnej se známějším 2. Newtonovým zákonem pro translaci, který říká, že působíme-li na těleso silou, pohybuje se se zrychlením úměrným velikosti síly a nepřímo úměrným své hmotnosti.

<sup>2</sup> Moment setrvačnosti je fyzikální veličina, která vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa při otáčivém pohybu. Její velikost závisí na rozložení hmoty v tělese vzhledem k ose otáčení. Body (části) tělesa s větší hmotností a umístěné dále od osy mají větší moment setrvačnosti. Jednotka SI je kilogram krát metr na druhou, značka jednotky:  $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ . Pro případ hmotného bodu hmotnosti  $m$  na pevném nehmotném závěsu délky  $l$  platí použitý vztah  $J = ml^2$ .

Rovnici můžeme linearizovat v okolí obecného pracovního bodu  $y_p(t), \dot{y}_p(t), \ddot{y}_p(t), u_p(t)$  použitím postupu popsaného v předchozí kapitole.

Jacobiho matice v (16) jsou tu zřejmě skaláry

$$\left. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}} \right|_p = mgl \cos y_p, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right|_p = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \ddot{\mathbf{y}}} \right|_p = ml^2$$

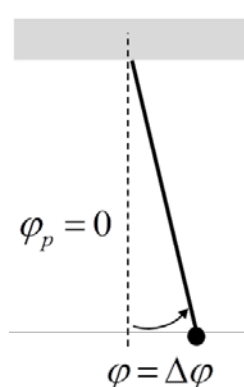
$$\left. \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} \right|_p = 1$$
(25)

Po dosazení do (18) a přerovnání tak dostáváme lineární aproximaci v (zatím obecném) pracovním bodě  $y_p(t), \dot{y}_p(t), \ddot{y}_p(t), u_p(t)$  ve tvaru

$$ml^2 \Delta \ddot{y} + mgl \cos y_p \Delta y = \Delta u$$
(26)

Ted' využijeme vztahu (26) abychom našli konkrétní lineární aproximace ve třech významných pracovních bodech.

### 1. Linearizace v dolní poloze



Jako první příklad najdeme lineární aproximaci v okolí dolního ekvilibría  $y_p = \varphi_p = 0, \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0, \ddot{y}_p = \ddot{\varphi}_p = 0, u_p = M_{cp} = 0$ , kdy kyvadlo visí v klidu v dolní poloze a žádný moment na něj nepůsobí. Nejprve dosazením do (23) ověříme, že jde skutečně o řešení nelineární rovnice systémů. Skutečně

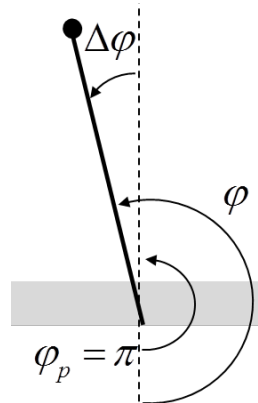
$$ml^2 0 + mgl \sin 0 = 0$$
(27)

Dále dosadíme hodnoty pracovního bodu do (26) a dostaneme

$$ml^2 \Delta \ddot{y} + mgl \Delta y = \Delta u$$
(28)

Což je hledaná lineární odchylková aproximace nelineárního modelu (26) v okolí dolního ekvilibría.

## 2. Linearizace v horní poloze



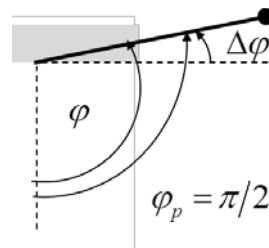
Jako druhý příklad najdeme lineární aproximaci v okolí horního ekvilibrria  $y_p = \varphi_p = \pi$ ,  $\dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0$ ,  $\ddot{y}_p = \ddot{\varphi} = 0$ ,  $u_p = M_{cp} = 0$ , kdy je kyvadlo vztyčeno v klidu v horní poloze a žádný moment na něj nepůsobí. Nejprve dosazením do (23) ověříme, že jde skutečně o řešení nelineární rovnice systémů. Skutečně

$$ml^2 0 + mgl \sin \pi = 0 \quad (29)$$

Dále dosadíme hodnoty pracovního bodu do (26) a dostaneme

$$ml^2 \Delta \ddot{y} - mgl \Delta y = \Delta u \quad (30)$$

Což je hledaná lineární odchylková aproximace nelineárního modelu (26) v okolí dolního ekvilibrria.3.  
Linearizace ve vodorovné poloze



Nakonec najdeme lineární aproximaci v okolí vodorovné polohy  $y_p = \varphi_p = \pi/2$  a  $\dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0$ .

Aby byl tento bod řešením, musí být splněna rovnice (23). Po dosazení vybraných hodnot dostaneme

$$ml^2 \ddot{y}_p + mgl = u_p \quad (31)$$

To je splněno buď pro  $\ddot{y}_p = \ddot{\varphi} = 0$ ,  $u_p = M_{cp} = mgl$ , kdy konstantním řídicím momentem udržujeme nulové zrychlení, anebo naopak pro  $\ddot{y}_p = \ddot{\varphi} = -g/l$ ,  $u_p = M_{cp} = 0$ , kdy je v pracovním bodě řídicí moment nulový a proto je nenulové zrychlení odpovídající gravitačnímu.

Pro oba pracovní body dostaneme dosazením do (26) stejnou lineární aproximaci

$$ml^2 \Delta \ddot{y} = \Delta u$$

Což je hledaná lineární odchylková aproximace nelineárního modelu (26) v okolí tohoto pracovního bodu.

## Nelineární stavový model jednoduchého kyvadla a jeho přibližné linearizace

Vydeme z nelineárního modelu vstup-výstup kyvadla (22) ve tvaru

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = M_c \quad (33)$$

nebo, při označení  $y = \varphi, u = M_c$  z modelu ve tvaru

$$ml^2\ddot{y} + mgl \sin y = u \quad (34)$$

Přirozenou a obvyklou volbou stavových veličin je  $x_1 = \varphi = y, x_2 = \dot{\varphi} = \dot{y}, u = M_c$ , což vede na stavový nelineární model tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (35)$$

nebo zapsáno maticově

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{f} \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, u \right) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u \end{bmatrix} \\ y &= \mathbf{h} \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, u \right) = h(x_1, x_2, u) = x_1 \end{aligned} \quad (36)$$

V okolí obecného pracovního bodu  $x_{1,p}, x_{2,p}, u_p$  můžeme stavový model přibližně linearizovat postupem popsaným v předchozí kapitole. Jacobiho matice (6), (9) jsou v tomto případě

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_{1,p} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} = \left[ \frac{\partial h}{\partial u} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

takže lineární odchylková aproximace (10) je

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_{1,p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \Delta u(t)$$

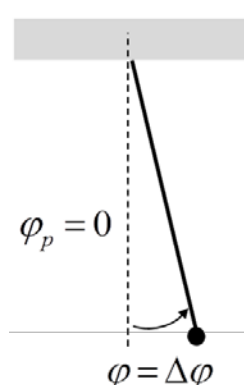
$$\Delta y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

neboli

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \cos x_{1,p} \Delta x_1 + \frac{1}{ml^2} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= \Delta x_1 \end{aligned} \tag{39}$$

Ted' využijeme vztahu (39) abychom našli konkrétní lineární aproximace ve třech významných pracovních bodech.

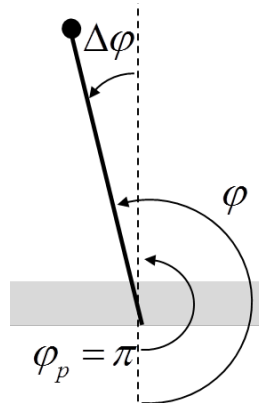
### 1. Linearizace v dolní poloze



Jako první příklad najdeme lineární aproximaci v okolí dolního ekvilibrria  $x_{1,p} = y_p = \varphi_p = 0$ ,  $x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0$ ,  $\ddot{y}_p = \ddot{\varphi}_p = 0$ ,  $u_p = M_{cp} = 0$ , kdy kyvadlo visí v klidu v dolní poloze a žádný moment na něj nepůsobí. Když dosadíme hodnoty pracovního bodu do (39), dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \Delta x_1 + \frac{1}{ml^2} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= \Delta x_1 \end{aligned} \tag{40}$$

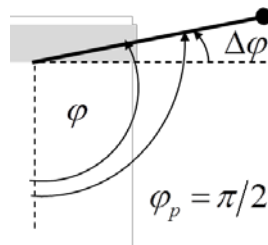
## 2. Linearizace v horní poloze



Jako druhý příklad najdeme lineární aproximaci v okolí horního ekvilibria  $x_{1,p} = y_p = \varphi_p = \pi$ ,  $x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0$ ,  $\ddot{y}_p = \ddot{\varphi}_p = 0$ ,  $u_p = M_{cp} = 0$ , kdy je kyvadlo vztyčeno v klidu v horní poloze a žádný moment na něj nepůsobí. Když dosadíme hodnoty pracovního bodu do (39) a dostaneme

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= \frac{g}{l} \Delta x_1 + \frac{1}{ml^2} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= \Delta x_1\end{aligned}\tag{41}$$

## 3. Linearizace ve vodorovné poloze



Nakonec najdeme lineární aproximaci v okolí vodorovné polohy  $x_{1,p} = y_p = \varphi_p = \pi/2$  a  $x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0$ . Když dosadíme hodnoty pracovního bodu do (39), dostaneme

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= \frac{1}{ml^2} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= \Delta x_1\end{aligned}\tag{42}$$



## Trochu obecnější nelineární model vstup-výstup a jeho přibližná linearizace

Podobně můžeme vyjít z nelineárního modelu vstup-výstup

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{0} \quad (43)$$

Tento model je o trochu obecnější než (11), neboť zahrnuje i případy, kdy vstup a výstup a/nebo jejich derivace jsou „neoddělitelně spojeny“ a  $\mathbf{G}$  nelze rozdělit na „výstupní část“  $\mathbf{D}$  a „vstupní část“  $\mathbf{N}$ . I zde opět vybereme nějaké nominální řešení (trajektorii), neboli pracovní bod, ve kterém chceme systém provozovat. Označíme-li ho  $\mathbf{y}_p(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}_p(t), \mathbf{u}_p(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}_p(t)$ , pak opět platí

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}_p^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}_p(t), \mathbf{y}_p(t), \mathbf{u}_p^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) = \mathbf{0} \quad (44)$$

neboť je to řešení rovnic nelineárního modelu jako každé jiné.

Vyjádříme hodnoty veličin a jejich derivací v okolí pracovního bodu pomocí odchylek jako

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^{(n)}(t) &= \mathbf{y}_p^{(n)}(t) + \Delta\mathbf{y}^{(n)}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{u}^{(m)}(t) &= \mathbf{u}_p^{(m)}(t) + \Delta\mathbf{u}^{(m)}(t) \end{aligned} \quad (45)$$

a dosadíme je do nelineární rovnice (43). Tím dostaneme

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}_p^{(n)}(t) + \Delta\mathbf{y}^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}_p(t) + \Delta\dot{\mathbf{y}}(t), \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t), \mathbf{u}_p^{(m)}(t) + \Delta\mathbf{u}^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}_p(t) + \Delta\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t)) = \mathbf{0} \quad (46)$$

Když rozvineme nelineární funkci  $\mathbf{G}$  na levé straně (46) v okolí pracovního bodu (!) v její Taylorovu řadu, dostaneme

$$\mathbf{G}|_p + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_p \Delta\mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \Big|_p \Delta\dot{\mathbf{y}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}} \Big|_p \Delta\mathbf{y}^{(n)} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_p \Delta\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_p \Delta\dot{\mathbf{u}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \Big|_p \Delta\mathbf{u}^{(m)} + \dots = \mathbf{0} \quad (47)$$

kde tečky nejvíce vpravo před rovnítkem zastupují členy vyšších řádů. Zde

$$\mathbf{G}|_p = \mathbf{G}(\mathbf{y}_p^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}_p(t), \mathbf{y}_p(t), \mathbf{u}_p^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) \quad (48)$$

a

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y}} \right|_p &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}}, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right|_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \dot{y}_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \dot{y}_2} & \cdots \\ \frac{\partial g_2}{\partial \dot{y}_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \dot{y}_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}}, \quad \dots \\
\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right|_p &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}}, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right|_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \dot{u}_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \dot{u}_2} & \cdots \\ \frac{\partial g_2}{\partial \dot{u}_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \dot{u}_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}}, \quad \dots
\end{aligned} \tag{49}$$

jsou obecně Jacobiho matice vyčíslené v pracovním bodě  $\mathbf{y}_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t), \mathbf{u}_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$ .

V případě SISO systému, kdy jsou všechny veličiny  $\mathbf{y}_p(t) = y_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t) = y_p^{(n)}(t)$  a  $\mathbf{u}_p(t) = u_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t) = u_p^{(m)}(t)$  skaláry, také funkce  $\mathbf{G}$  a její parciální jsou derivace skalární.

Využitím (44) se (47) zjednoduší na

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y}} \right|_p \Delta \mathbf{y} + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right|_p \Delta \dot{\mathbf{y}} + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}} \right|_p \Delta \mathbf{y}^{(n)} + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right|_p \Delta \mathbf{u} + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right|_p \Delta \dot{\mathbf{u}} + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \right|_p \Delta \mathbf{u}^{(m)} + \dots = \mathbf{0} \tag{50}$$

Zde opět nezáleží na tom, zda pracovní bod je nebo není ekvilibrím a rovnost platí přesně. K aproximaci dojde až nyní tím, že v (50) zanedbáme členy řádů vyšších než 1. Tím dostaneme přibližné, ale lineární vztahy

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y}} \right|_p \Delta \mathbf{y} + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right|_p \Delta \dot{\mathbf{y}} + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}} \right|_p \Delta \mathbf{y}^{(n)} + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right|_p \Delta \mathbf{u} + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right|_p \Delta \dot{\mathbf{u}} + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \right|_p \Delta \mathbf{u}^{(m)} \cong \mathbf{0} \tag{51}$$

kteří aproximují původní nelineární rovnice (1).

Označíme-li Jacobiho matice v (51) obvyklými písmeny (pozor na znaménka!)

$$\mathbf{a}_0 = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y}} \right|_p, \mathbf{a}_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right|_p, \dots, \mathbf{a}_n = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}} \right|_p, \mathbf{b}_0 = - \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right|_p, \mathbf{b}_1 = - \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right|_p, \dots, \mathbf{b}_m = - \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \right|_p \tag{52}$$

dostáváme konečně namísto nelineárního modelu (43) jeho lineární odchylkovou aproximaci stejnou jako (20), tj.

$$\mathbf{a}_0 \Delta \mathbf{y} + \mathbf{a}_1 \Delta \dot{\mathbf{y}} + \cdots + \mathbf{a}_n \Delta \mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{b}_0 \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b}_1 \Delta \dot{\mathbf{u}} + \cdots + \mathbf{b}_m \Delta \mathbf{u}^{(m)}$$

Pozor: Tato aproximace je vždy vztažena k určitému pracovnímu bodu (nominálnímu řešení)  $\mathbf{y}_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t), \mathbf{u}_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$  a platí jen pro malé odchylky od něj. Příirozeně platí tím přesněji, čím jsou odchylky menší a také čím jsou původní nelineární funkce v pracovním bodě „podobnější lineárním.“