

Přibližná linearizace modelu kyvadla

18.02.2019 14:29

Obsah

Opakování kalkulu - Taylorův rozvoj funkce.....	2
Nelineární stavový model a jeho přibližná linearizace	4
Nelineární model vstup-výstup a jeho přibližná linearizace	7
Ještě trochu obecnější nelineární model vstup-výstup a jeho přibližná linearizace	10
Nelineární model vstup-výstup jednoduchého kyvadla a jeho přibližné linearizace	13
Nelineární stavový model jednoduchého kyvadla a jeho přibližné linearizace	17

Opakování kalkulu - Taylorův rozvoj funkce

Taylorův rozvoj nekonečně diferencovatelné funkce $f(x)$ reálné proměnné x v okolí bodu x_p , (neboli Taylorova řada této funkce v bodě $x = x_p + \Delta x$) je

$$f(x_p + \Delta x) = f(x_p) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_p} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x=x_p} (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x=x_p} (\Delta x)^3 + \dots$$

Je-li $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektorová funkce vektorové proměnné \mathbf{x} , taková, že všechny její parciální derivace všech řádů existují, pak její Taylorův rozvoj v okolí bodu \mathbf{x}_p , (neboli Taylorova řada této funkce v bodě $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \Delta \mathbf{x}$) je nekonečným součtem totálních diferenciálů

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_p + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_p) + \frac{1}{1!} \mathbf{D}^1 \mathbf{f} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p} \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2!} \mathbf{D}^2 \mathbf{f} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p} (\Delta \mathbf{x})^2 + \dots$$

kde $\mathbf{D}^1 \mathbf{f}$ je totální diferenciál 1. řádu funkce \mathbf{f} definovaný jako

$$\mathbf{D}^1 \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \Delta x_n = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

kde $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$ se nazývá **Jacobiho matice** a po vyčíslení v bodě $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p$ je

$$\mathbf{D}^1 \mathbf{f} \Big|_{\mathbf{x}_p, \Delta \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \Big|_{x_{p,1}} \Delta x_1 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \Big|_{x_{p,2}} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \Big|_{x_{p,n}} \Delta x_n = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_p} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

Analogicky $\mathbf{D}^2\mathbf{f}$ je totální diferenciál 2. řádu funkce \mathbf{f} je definovaný jako

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2\mathbf{f} &= \mathbf{D}^1(\mathbf{D}^1\mathbf{f}) = \mathbf{D}^1\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_n}\Delta x_n\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_n}\Delta x_n\right)\Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_n}\Delta x_n\right)\Delta x_2 + \\ &\quad \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_n}\Delta x_n\right)\Delta x_n\end{aligned}$$

a bez použití tenzorů se nedá hezky kompaktně vyjádřit.

Pro jednotlivé složky (řádky) f_i funkce \mathbf{f} lze sice při vyjádření použít **Hessovu matici** složenou ze všech druhých parciálních derivací

$$\mathbf{H}(f_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

ale pro celou funkci je třeba

$$\mathbf{H}(\mathbf{f}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}(f_1) \\ \vdots \\ \mathbf{H}(f_n) \end{Bmatrix}$$

což je tenzor 3. řádu, tedy 3-D pole složené z Hessových matic. Druhý člen se jím kompaktně vyjádřit dá, ale jen použitím tenzorových operací.

V mnoha aplikacích Taylorova rozvoje se členy druhého a vyšších řádů zanedbávají. Lze to tak udělat, jen když jsou všechny ve srovnání s nultým a prvním členem malé. K tomu je potřeba, aby všechny byly malé příslušné parciální derivace, odchylky (menší než 1) a nejlépe obojí.

Nelineární stavový model a jeho přibližná linearizace

Pro systém popsaný nelineárním stavovým modelem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\end{aligned}\tag{1}$$

vybereme nějaké nominální řešení (trajektorii), ve kterém chceme systém provozovat - například referenční trajektorie robota, limitní cyklus nebo, nejčastěji, ekvilibrium - a říkejme mu pracovní bod.

Označíme-li ho $\mathbf{x}_p(t)$, $\mathbf{u}_p(t)$, $\mathbf{y}_p(t)$, pak samozřejmě platí

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) \\ \mathbf{y}_p(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t))\end{aligned}\tag{2}$$

neboť je to řešení rovnic stavového modelu jako každé jiné.

Vyjádříme hodnoty veličin v okolí pracovního bodu pomocí odchylek jako

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t)\end{aligned}\tag{3}$$

a dosadíme je do nelineárních rovnic (1). Tím dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p(t) + \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t))\end{aligned}\tag{4}$$

Když rozvineme nelineární funkce na pravých stranách (4) v okolí pracovního bodu (!) v jejich Taylorovy řady, dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p(t) + \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) + \dots \\ \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) + \dots\end{aligned}\tag{5}$$

kde tečky nahrazují členy vyšších řádů. Zde

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p}, & \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p} \\ \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p}, & \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} & \dots \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p} \end{aligned} \quad (6)$$

jsou obecně Jacobiho matice vyčíslené v pracovním bodě $\mathbf{x}_p(t)$, $\mathbf{u}_p(t)$, $\mathbf{y}_p(t)$. V případě SISO

systému, kdy jsou veličiny $\mathbf{y}(t) = y(t)$ a $\mathbf{u}(t) = u(t)$ skaláry, zůstává $\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}$ čtvercovou maticí, ale

$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}$ je sloupcový vektor, $\left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}$ je řádkový vektor a $\left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}$ je skalár.

Využitím (2) se (5) zjednoduší na

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{u}(t) + \dots \\ \Delta \mathbf{y}(t) &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{u}(t) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Zde nezáleží na tom, zda pracovní bod je nebo není ekvilibrím a dále oba vztahy platí přesně.

K aproximaci dojde až nyní tím, že v (7) zanedbáme v obou rovnostech všechny členy řádů vyšších než 1. Tím dostaneme přibližné, ale lineární vztahy

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) &\cong \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{u}(t) \\ \Delta \mathbf{y}(t) &\cong \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

kteří aproximují původní nelineární rovnice (1).

Označíme-li Jacobiho matice v (8) obvyklými písmeny

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}, \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}, \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}, \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \quad (9)$$

dostáváme konečně namísto nelineárního modelu (1) jeho lineární odchylkovou aproximaci

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(t)$$

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\Delta \mathbf{u}(t)$$

Pozor: Tato aproximace je vždy vztažena k určitému pracovnímu bodu (nominálnímu řešení) $\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t), \mathbf{y}_p(t)$ a platí jen pro malé odchylky od něj. Přirozeně platí tím přesněji, čím jsou odchylky menší a také čím jsou původní nelineární funkce v pracovním bodě „podobnější lineárním.“

Nelineární model vstup-výstup a jeho přibližná linearizace

Podobně můžeme vyjít z nelineárního modelu vstup-výstup

$$\mathbf{d}(\mathbf{y}^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}(t), \mathbf{y}(t)) = \mathbf{n}(\mathbf{u}^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (11)$$

Opět vybereme nějaké nominální řešení (trajektorii), neboli pracovní bod, ve kterém chceme systém provozovat. Označíme-li ho $\mathbf{y}_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t), \mathbf{u}_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$, pak opět platí

$$\mathbf{d}(\mathbf{y}_p^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}_p(t), \mathbf{y}_p(t)) = \mathbf{n}(\mathbf{u}_p^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) \quad (12)$$

neboť je to řešení rovnic nelineárního modelu jako každé jiné.

Vyjádříme hodnoty veličin a jejich derivací v okolí pracovního bodu pomocí odchylek jako

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^{(n)}(t) &= \mathbf{y}_p^{(n)}(t) + \Delta\mathbf{y}^{(n)}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{u}^{(m)}(t) &= \mathbf{u}_p^{(m)}(t) + \Delta\mathbf{u}^{(m)}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

a dosadíme je do nelineárních rovnic (11). Tím dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\mathbf{y}^{(n)}(t) + \Delta\mathbf{y}^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}(t) + \Delta\dot{\mathbf{y}}(t), \mathbf{y}(t) + \Delta\mathbf{y}(t)) &= \\ = \mathbf{n}(\mathbf{u}^{(m)}(t) + \Delta\mathbf{u}^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}(t) + \Delta\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t) + \Delta\mathbf{u}(t)) \end{aligned} \quad (14)$$

Když rozvineme nelineární funkce na levé a pravé straně (14) v okolí pracovního bodu (!) v jejich Taylorovy řady, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{d}|_p + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{y}}|_p \Delta\mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}|_p \Delta\dot{\mathbf{y}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}}|_p \Delta\mathbf{y}^{(n)} + \dots \\ = \mathbf{n}|_p + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}}|_p \Delta\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}|_p \Delta\dot{\mathbf{u}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}}|_p \Delta\mathbf{u}^{(m)} + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

kde tečky zastupují členy vyšších řádů. Zde

$$\mathbf{d}|_p = \mathbf{d}(y_p^{(n)}(t), \dots, \dot{y}_p(t), y_p(t)), \quad \mathbf{n}|_p = \mathbf{n}(u_p^{(m)}(t), \dots, \dot{u}_p(t), u_p(t))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{y}}|_p &= \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial y_1} & \frac{\partial d_1}{\partial y_2} & \dots \\ \frac{\partial d_2}{\partial y_1} & \frac{\partial d_2}{\partial y_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{y=y_p \\ \vdots \\ y^{(n)}=y_p^{(n)} \\ u=u_p \\ \vdots \\ u^{(m)}=u_p^{(m)}}}, \quad \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}|_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial \dot{y}_1} & \frac{\partial d_1}{\partial \dot{y}_2} & \dots \\ \frac{\partial d_2}{\partial \dot{y}_1} & \frac{\partial d_2}{\partial \dot{y}_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{y=y_p \\ \vdots \\ y^{(n)}=y_p^{(n)} \\ u=u_p \\ \vdots \\ u^{(m)}=u_p^{(m)}}}, \quad \dots \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}}|_p &= \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial u_1} & \frac{\partial n_1}{\partial u_2} & \dots \\ \frac{\partial n_2}{\partial u_1} & \frac{\partial n_2}{\partial u_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{y=y_p \\ \vdots \\ y^{(n)}=y_p^{(n)} \\ u=u_p \\ \vdots \\ u^{(m)}=u_p^{(m)}}}, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}|_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial \dot{u}_1} & \frac{\partial n_1}{\partial \dot{u}_2} & \dots \\ \frac{\partial n_2}{\partial \dot{u}_1} & \frac{\partial n_2}{\partial \dot{u}_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{y=y_p \\ \vdots \\ y^{(n)}=y_p^{(n)} \\ u=u_p \\ \vdots \\ u^{(m)}=u_p^{(m)}}}, \quad \dots \end{aligned}$$

(16)

jsou obecně Jacobiho matice vyčíslené v pracovním bodě $\mathbf{y}_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t), \mathbf{u}_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$.

V případě SISO systému, kdy jsou všechny veličiny $\mathbf{y}_p(t) = y_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t) = y_p^{(n)}(t)$ a

$\mathbf{u}_p(t) = u_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t) = u_p^{(m)}(t)$ skaláry, také funkce $\mathbf{d} = d, \mathbf{n} = n$ a jejich parciální derivace skalární.

Využitím (12) se (15) zjednoduší na

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{y}}|_p \Delta \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}|_p \Delta \dot{\mathbf{y}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}}|_p \Delta \mathbf{y}^{(n)} + \dots = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}}|_p \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}|_p \Delta \dot{\mathbf{u}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}}|_p \Delta \mathbf{u}^{(m)} + \dots$$

(17)

Zde opět nezáleží na tom, zda pracovní bod je nebo není ekvilibriem a dále oba vztahy platí přesně. K aproximaci dojde až nyní tím, že v (17) zanedbáme v obou rovnostech všechny členy řádů vyšších než 1. Tím dostaneme přibližné, ale lineární vztahy

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{y}}|_p \Delta \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}|_p \Delta \dot{\mathbf{y}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}}|_p \Delta \mathbf{y}^{(n)} \cong \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}}|_p \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}|_p \Delta \dot{\mathbf{u}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}}|_p \Delta \mathbf{u}^{(m)}$$

(18)

které aproximují původní nelineární rovnice (1).

Označíme-li Jacobiho matice v (18) obvyklými písmeny

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{y}}|_p, \mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}|_p, \dots, \mathbf{a}_n = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}}|_p, \quad \mathbf{b}_0 = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}}|_p, \mathbf{b}_1 = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}|_p, \dots, \mathbf{b}_m = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}}|_p$$

(19)

dostáváme konečně namísto nelineárního modelu (1) jeho lineární odchytkovou aproximaci

$$\mathbf{a}_0\Delta\mathbf{y} + \mathbf{a}_1\Delta\dot{\mathbf{y}} + \cdots + \mathbf{a}_n\Delta\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{b}_0\Delta\mathbf{u} + \mathbf{b}_1\Delta\dot{\mathbf{u}} + \cdots + \mathbf{b}_m\Delta\mathbf{u}^{(m)}$$

(20)

Pozor: Tato aproximace je vždy vztažena k určitému pracovnímu bodu (nominálnímu řešení)

$\mathbf{y}_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t), \mathbf{u}_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$ a platí jen pro malé odchylky od něj. Přirozeně platí tím přesněji, čím jsou odchylky menší a také čím jsou původní nelineární funkce v pracovním bodě „podobnější lineárním.“

Podobně můžeme vyjít z nelineárního modelu vstup-výstup

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{0} \quad (21)$$

Tento model je o trochu obecnější než (11), neboť zahrnuje i případy, kdy vstup a výstup a/nebo jejich derivace jsou „neoddělitelně spojeny“ a \mathbf{g} nelze rozdělit na „výstupní část“ \mathbf{D} a „vstupní část“ \mathbf{N} . I zde opět vybereme nějaké nominální řešení (trajektorii), neboli pracovní bod, ve kterém chceme systém provozovat. Označíme-li ho $\mathbf{y}_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t), \mathbf{u}_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$, pak opět platí

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}_p^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}_p(t), \mathbf{y}_p(t), \mathbf{u}_p^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) = \mathbf{0} \quad (22)$$

neboť je to řešení rovnic nelineárního modelu jako každé jiné.

Vyjádříme hodnoty veličin a jejich derivací v okolí pracovního bodu pomocí odchylek jako

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^{(n)}(t) &= \mathbf{y}_p^{(n)}(t) + \Delta\mathbf{y}^{(n)}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{u}^{(m)}(t) &= \mathbf{u}_p^{(m)}(t) + \Delta\mathbf{u}^{(m)}(t) \end{aligned} \quad (23)$$

a dosadíme je do nelineární rovnice (21). Tím dostaneme

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}^{(n)}(t) + \Delta\mathbf{y}^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}(t) + \Delta\dot{\mathbf{y}}(t), \mathbf{y}(t) + \Delta\mathbf{y}(t), \mathbf{u}^{(m)}(t) + \Delta\mathbf{u}^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}(t) + \Delta\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t) + \Delta\mathbf{u}(t)) = \mathbf{0} \quad (24)$$

Když rozvineme nelineární funkci \mathbf{g} na levé straně (24) v okolí pracovního bodu (!) v její Taylorovu řadu, dostaneme

$$\mathbf{g}|_p + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}|_p \Delta\mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}|_p \Delta\dot{\mathbf{y}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}}|_p \Delta\mathbf{y}^{(n)} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}|_p \Delta\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}|_p \Delta\dot{\mathbf{u}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}}|_p \Delta\mathbf{u}^{(m)} + \dots = \mathbf{0} \quad (25)$$

kde tečky nejvíce vpravo před rovnítkem zastupují členy vyšších řádů. Zde

$$\mathbf{g}|_p = \mathbf{g}(\mathbf{y}_p^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}_p(t), \mathbf{y}_p(t), \mathbf{u}_p^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) \quad (26)$$

a

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \right|_p &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}}, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right|_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \dot{y}_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \dot{y}_2} & \cdots \\ \frac{\partial g_2}{\partial \dot{y}_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \dot{y}_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}}, \quad \dots \\
\left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_p &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}}, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right|_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \dot{u}_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \dot{u}_2} & \cdots \\ \frac{\partial g_2}{\partial \dot{u}_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \dot{u}_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}}, \quad \dots
\end{aligned} \tag{27}$$

jsou obecně Jacobiho matice vyčíslené v pracovním bodě $\mathbf{y}_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t), \mathbf{u}_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$.

V případě SISO systému, kdy jsou všechny veličiny $\mathbf{y}_p(t) = y_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t) = y_p^{(n)}(t)$ a $\mathbf{u}_p(t) = u_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t) = u_p^{(m)}(t)$ skaláry, také funkce \mathbf{g} a její parciální jsou derivace skalární.

Využitím (27) se (25) zjednoduší na

$$\left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \right|_p \Delta \mathbf{y} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right|_p \Delta \dot{\mathbf{y}} + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}} \right|_p \Delta \mathbf{y}^{(n)} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_p \Delta \mathbf{u} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right|_p \Delta \dot{\mathbf{u}} + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \right|_p \Delta \mathbf{u}^{(m)} + \dots = \mathbf{0} \tag{28}$$

Zde opět nezáleží na tom, zda pracovní bod je nebo není ekvilibríem a rovnost platí přesně. K aproximaci dojde až nyní tím, že ve vztahu (28) zanedbáme členy řádů vyšších než 1. Tím dostaneme přibližné, ale lineární vztahy

$$\left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \right|_p \Delta \mathbf{y} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right|_p \Delta \dot{\mathbf{y}} + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}} \right|_p \Delta \mathbf{y}^{(n)} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_p \Delta \mathbf{u} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right|_p \Delta \dot{\mathbf{u}} + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \right|_p \Delta \mathbf{u}^{(m)} \cong \mathbf{0} \tag{29}$$

které aproximují původní nelineární rovnice (21).

Označíme-li Jacobiho matice v (29) obvyklými písmeny (pozor na znaménka!)

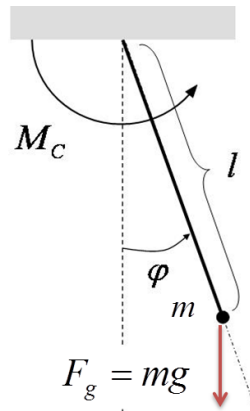
$$\mathbf{a}_0 = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \right|_p, \mathbf{a}_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right|_p, \dots, \mathbf{a}_n = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}} \right|_p, \mathbf{b}_0 = - \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_p, \mathbf{b}_1 = - \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right|_p, \dots, \mathbf{b}_m = - \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \right|_p \tag{30}$$

dostáváme konečně namísto nelineárního modelu (21) jeho lineární odchylkovou aproximaci stejnou jako (20), tj.

$$\mathbf{a}_0\Delta\mathbf{y} + \mathbf{a}_1\Delta\dot{\mathbf{y}} + \dots + \mathbf{a}_n\Delta\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{b}_0\Delta\mathbf{u} + \mathbf{b}_1\Delta\dot{\mathbf{u}} + \dots + \mathbf{b}_m\Delta\mathbf{u}^{(m)}$$

Pozor: Tato aproximace je vždy vztažena k určitému pracovnímu bodu (nominálnímu řešení) $\mathbf{y}_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t), \mathbf{u}_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$ a platí jen pro malé odchylky od něj. Přírozeně platí tím přesněji, čím jsou odchylky menší a také čím jsou původní nelineární funkce v pracovním bodě „podobnější lineárním.“

Pro idealizované kyvadlo řízené momentem obr.



vychází z 2. Newtonova zákona pro rotaci¹ pohybová rovnice

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} &= \sum M \\ &= M_c - F_g l \sin \varphi \\ &= M_c - mgl \sin \varphi \end{aligned} \quad (32)$$

Dosadíme-li za moment setrvačnosti² $J = ml^2$, dostaneme po několika úpravách nelineární model vstup-výstup ve tvaru

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = M_c \quad (33)$$

Označíme-li $y = \varphi, u = M_c$, dostaneme z toho nelineární model vstup-výstup

$$ml^2\ddot{y} + mgl \sin y = u \quad (34)$$

Porovnáním s obecným modelem (11) vidíme, že jsou všechny veličiny a funkce skalární a že

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\ddot{y}(t), \dot{y}(t), y(t)) &= ml^2\ddot{y} + mgl \sin y \\ \mathbf{N}(u(t)) &= u \end{aligned} \quad (35)$$

¹ Působíme-li na těleso momentem síly, otáčí se s úhlovým zrychlením, které je podle 2. Newtonova zákona pro rotaci úměrné celkovému momentu a nepřímo úměrné momentu setrvačnosti.

Srovnej se známějším 2. Newtonovým zákonem pro translaci, který říká, že působíme-li na těleso silou, pohybuje se se zrychlením úměrným velikosti síly a nepřímo úměrným své hmotnosti.

² Moment setrvačnosti je fyzikální veličina, která vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa při otáčivém pohybu. Její velikost závisí na rozložení hmoty v tělese vzhledem k ose otáčení. Body (části) tělesa s větší hmotností a umístěné dál od osy mají větší moment setrvačnosti. Jednotka SI je kilogram krát metr na druhou, značka jednotky: $\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Pro případ hmotného bodu hmotnosti m na pevném nehmotném závěsu délky l platí použitý vztah $J = ml^2$.

Rovnici můžeme linearizovat v okolí obecného pracovního bodu $y_p(t), \dot{y}_p(t), \ddot{y}_p(t), u_p(t)$ použitím postupu popsaného v předchozí kapitole.

Jacobiho matice v (16) jsou tu zřejmě skaláry

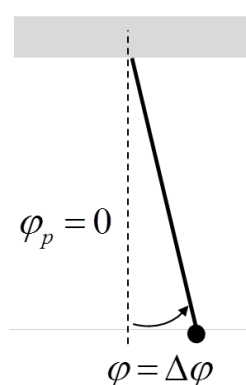
$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}} \right|_p &= mgl \cos y_p, & \left. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right|_p &= 0, & \left. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \ddot{\mathbf{y}}} \right|_p &= ml^2 \\ \left. \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} \right|_p &= 1 \end{aligned} \quad (36)$$

Po dosazení do (18) a přerovnání tak dostáváme lineární aproximaci v (zatím obecném) pracovním bodě $y_p(t), \dot{y}_p(t), \ddot{y}_p(t), u_p(t)$ ve tvaru

$$ml^2 \Delta \ddot{y} + mgl \cos y_p \Delta y = \Delta u \quad (37)$$

Ted' využijeme vztahu (26) abychom našli konkrétní lineární aproximace ve třech významných pracovních bodech.

1. Linearizace v dolní poloze



Jako první příklad najdeme lineární aproximaci v okolí dolního ekvilibria $y_p = \varphi_p = 0, \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0, \ddot{y}_p = \ddot{\varphi}_p = 0, u_p = M_{cp} = 0$, kdy kyvadlo visí v klidu v dolní poloze a žádný moment na něj nepůsobí. Nejprve dosazením do (34) ověříme, že jde skutečně o řešení nelineární rovnice systémů. Skutečně

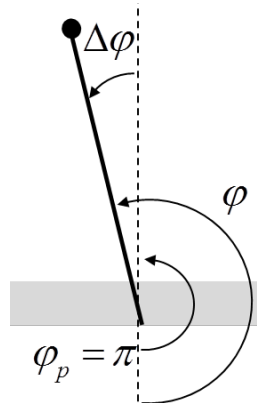
$$ml^2 0 + mgl \sin 0 = 0 \quad (27)$$

Dále dosadíme hodnoty pracovního bodu do (37) a dostaneme

$$ml^2 \Delta \ddot{y} + mgl \Delta y = \Delta u \quad (28)$$

Což je hledaná lineární odchylková aproximace nelineárního modelu (26) v okolí dolního ekvilibria.

2. Linearizace v horní poloze



Jako druhý příklad najdeme lineární aproximaci v okolí horního ekvilibrria $y_p = \varphi_p = \pi$, $\dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0$, $\ddot{y}_p = \ddot{\varphi} = 0$, $u_p = M_{cp} = 0$, kdy je kyvadlo vztyčeno v klidu v horní poloze a žádný moment na něj nepůsobí. Nejprve dosazením do (34) ověříme, že jde skutečně o řešení nelineární rovnice systémů. Skutečně

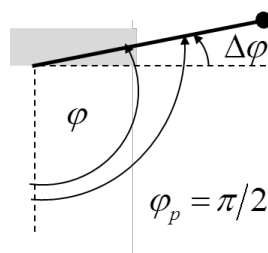
$$ml^2 \ddot{0} + mgl \sin \pi = 0 \quad (29)$$

Dále dosadíme hodnoty pracovního bodu do (26) a dostaneme

$$ml^2 \Delta \ddot{y} - mgl \Delta y = \Delta u \quad (30)$$

Což je hledaná lineární odchylková aproximace nelineárního modelu (34) v okolí dolního ekvilibrria.

3. Linearizace ve vodorovné poloze



Nakonec najdeme lineární aproximaci v okolí vodorovné polohy $y_p = \varphi_p = \pi/2$ a $\dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0$.

Aby byl tento bod řešením, musí být splněna rovnice (34). Po dosazení vybraných hodnot dostaneme

$$ml^2 \ddot{y}_p + mgl = u_p \quad (31)$$

To je splněno buď pro $\ddot{y}_p = \ddot{\varphi} = 0$, $u_p = M_{cp} = mgl$, kdy konstantním řídicím momentem udržujeme nulové zrychlení, anebo naopak pro $\ddot{y}_p = \ddot{\varphi} = -g/l$, $u_p = M_{cp} = 0$, kdy je v pracovním bodě řídicí moment nulový a proto je nenulové zrychlení odpovídající gravitačnímu.

Pro oba pracovní body dostaneme dosazením do (37) stejnou lineární aproximaci

$$ml^2 \Delta \ddot{y} = \Delta u \quad (32)$$

Což je hledaná lineární odchytková aproximace nelineárního modelu (34) v okolí tohoto pracovního bodu.

Nelineární stavový model jednoduchého kyvadla a jeho přibližné linearizace

Vydeme z nelineárního modelu vstup-výstup kyvadla (22) ve tvaru

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = M_c \quad (33)$$

nebo, při označení $y = \varphi, u = M_c$ z modelu ve tvaru

$$ml^2\ddot{y} + mgl \sin y = u \quad (34)$$

Přirozenou a obvyklou volbou stavových veličin je $x_1 = \varphi = y, x_2 = \dot{\varphi} = \dot{y}, u = M_c$, což vede na stavový nelineární model tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (35)$$

nebo zapsáno maticově

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, u \right) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u \end{bmatrix} \\ y &= \mathbf{h} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, u \right) = h(x_1, x_2, u) = x_1 \end{aligned} \quad (36)$$

V okolí obecného pracovního bodu $x_{1,p}, x_{2,p}, u_p$ můžeme stavový model přibližně linearizovat postupem popsaným v předchozí kapitole. Jacobiho matice (6), (9) jsou v tomto případě

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_p, u_p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_{1,p} & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(x_p, u_p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_p, u_p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p} = [1 \quad 0], & \mathbf{D} &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(x_p, u_p)} = \left[\frac{\partial h}{\partial u} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

takže lineární odchylková aproximace (10) je

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_{1,p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \Delta u(t)$$

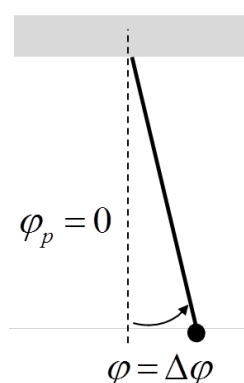
$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

neboli

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \cos x_{1,p} \Delta x_1 + \frac{1}{ml^2} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= \Delta x_1 \end{aligned} \tag{39}$$

Ted' využijeme vztahu (39) abychom našli konkrétní lineární aproximace ve třech významných pracovních bodech.

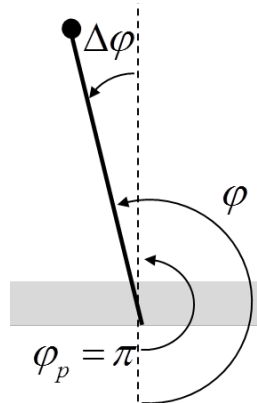
1. Linearizace v dolní poloze



Jako první příklad najdeme lineární aproximaci v okolí dolního ekvilibrria $x_{1,p} = y_p = \varphi_p = 0$, $x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0$, $\ddot{y}_p = \ddot{\varphi} = 0$, $u_p = M_{cp} = 0$, kdy kyvadlo visí v klidu v dolní poloze a žádný moment na něj nepůsobí. Když dosadíme hodnoty pracovního bodu do (39), dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \Delta x_1 + \frac{1}{ml^2} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= \Delta x_1 \end{aligned} \tag{40}$$

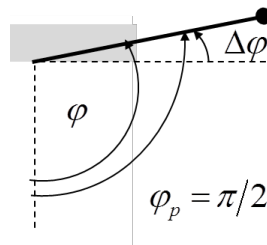
2. Linearizace v horní poloze



Jako druhý příklad najdeme lineární aproximaci v okolí horního ekvilibria $x_{1,p} = y_p = \varphi_p = \pi$, $x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0$, $\ddot{y}_p = \ddot{\varphi}_p = 0$, $u_p = M_{cp} = 0$, kdy je kyvadlo vztyčeno v klidu v horní poloze a žádný moment na něj nepůsobí. Když dosadíme hodnoty pracovního bodu do (39) a dostaneme

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= \frac{g}{l} \Delta x_1 + \frac{1}{ml^2} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= \Delta x_1\end{aligned}\tag{41}$$

3. Linearizace ve vodorovné poloze



Nakonec najdeme lineární aproximaci v okolí vodorovné polohy $x_{1,p} = y_p = \varphi_p = \pi/2$ a $x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0$. Když dosadíme hodnoty pracovního bodu do (39), dostaneme

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= \frac{1}{ml^2} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= \Delta x_1\end{aligned}\tag{42}$$