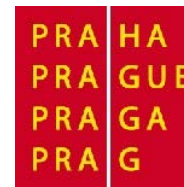




OPERAČNÍ PROGRAM PRAHA
ADAPTABILITA



Příklady k přednášce 2 - Spojité modely



Michael Šebek
Automatické řízení 2015



Řešení stavové rovnice v časové oblasti

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad x(0^-) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(t) = 1(t)$$

- Při řešení v časové oblasti najdeme vlastní čísla

$$p(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 + 6s + 8 \rightarrow s_1 = -2, s_2 = -4$$

- a předpokládáme stavovou matici přechodu ve tvaru

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t} & K_3 e^{-2t} + K_4 e^{-4t} \\ K_5 e^{-2t} + K_6 e^{-4t} & K_7 e^{-2t} + K_8 e^{-4t} \end{bmatrix}$$

- Konstanty najdeme ze známých vlastností matice

$$\Phi(0) = \mathbf{I} \Rightarrow K_1 + K_2 = 1, K_3 + K_4 = 0, K_5 + K_6 = 0, K_7 + K_8 = 1$$

$$\dot{\Phi}(0) = \mathbf{A} \Rightarrow -2K_1 - 4K_2 = 0, -2K_3 - 4K_4 = 1, -2K_5 - 4K_6 = -8, -2K_7 - 4K_8 = -6$$

- takže

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{-4t} & -e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix}$$



Řešení stavové rovnice v časové oblasti

- a odezva na počáteční stav je $\Phi(t)\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{-4t} \end{bmatrix}$

- dále $\Phi(t-\tau)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)} & -\frac{1}{2}e^{-4(t-\tau)} \\ -e^{-2(t-\tau)} & +2e^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix}$ a z toho

$$\int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau - \frac{1}{2}e^{-4t} \int_0^t e^{4\tau} d\tau \\ -e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau + 2e^{-4t} \int_0^t e^{4\tau} d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{-4t} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

- Takže celková odezva je $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} + \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{7}{8}e^{-4t} \\ -\frac{7}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}e^{-4t} \end{bmatrix}$



$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad x(0^-) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(t) = 1(t)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & s+6 \end{bmatrix} \Rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -8 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 6s + 8} = \begin{bmatrix} \frac{s+6}{s^2 + 6s + 8} & \frac{1}{s^2 + 6s + 8} \\ \frac{-8}{s^2 + 6s + 8} & \frac{s}{s^2 + 6s + 8} \end{bmatrix}$$

- Obraz odezvy je celkem

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}u(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s^2 + 6s + 8)s} \\ \frac{s}{(s^2 + 6s + 8)s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{s+6}{s^2 + 6s + 8} \\ \frac{-8}{s^2 + 6s + 8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 6s + 1}{(s^2 + 6s + 8)s} \\ \frac{-7s}{(s^2 + 6s + 8)s} \end{bmatrix}$$

- a časový průběh odezvy je stejný jako v minulém řešení

$$= \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 6s + 1}{s(s+2)(s+4)} \\ \frac{-7s}{s(s+2)(s+4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8s} + \frac{7}{4(s+2)} - \frac{7}{8(s+4)} \\ -\frac{7}{2(s+2)} + \frac{7}{2(s+4)} \end{bmatrix}$$



Řešení Laplaceovou transformací

- Dále: z rozkladu na parciální zlomky

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+6}{s^2+6s+8} & \frac{1}{s^2+6s+8} \\ \frac{-8}{s^2+6s+8} & \frac{s}{s^2+6s+8} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+4} & \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{2(s+4)} \\ -\frac{4}{s+2} + \frac{4}{s+4} & -\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+4} \end{bmatrix}$$

je zřejmé, že to je obraz stavové matice přechodu

```
>> Fis=inv([s 0;0 s]-A)
Fis =
      6 + s      1
      -8         s
      -----
      8 + 6s + s^2
>> x=Fis*([1;0]+[0;1/s])
x =
      1 + 6s + s^2
      -7s
      -----
      8s + 6s^2 + s^3
>> x1=partial(x(1))
x1 =
      -7/8      7/4      1/8
      -----  -----  ---
      4 + s     2 + s     s
>> x2=partial(x(2))
x2 =
      7/2      -7/2
      -----  -----
      4 + s     2 + s

>> Fill=partial(Fis(1,1))
Fill =
      -1      2
      -----  -----
      4 + s     2 + s
```



Příklad: Směrování satelitu

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

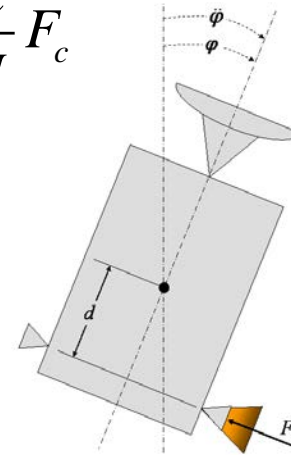
- IO model $J\ddot{\varphi} = F_c d \quad \dot{\varphi} = \omega, \dot{\omega} = \frac{d}{J} F_c$

- Stavový model

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix}, u = \frac{d}{J} F_c, y = \varphi$$

$$y = [1 \quad 0] \mathbf{x}$$



- Charakteristický polynom

$$p(s) = \det \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right) = s^2$$

- a řešení stavových rovnic L-transformací

$$\mathbf{x}(s) = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} u(s) + \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \mathbf{x}(0^-)$$

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$y(s) = \frac{1}{s^2} u(s) + \frac{1}{s^2} [s \quad 1] \mathbf{x}(0^-)$$



- Stavová matice přechodu $\det(sI - A) = s^2 \rightarrow \Phi(t) = \begin{bmatrix} k_{11} + l_{11}t & k_{12} + l_{12}t \\ k_{21} + l_{21}t & k_{22} + l_{22}t \end{bmatrix}$

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = I \quad \dot{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = A$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \right\} \quad \Phi(t - \tau) = \begin{bmatrix} 1 & t - \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u(t) = 1(t)$$

- Řešení v časové oblasti pro

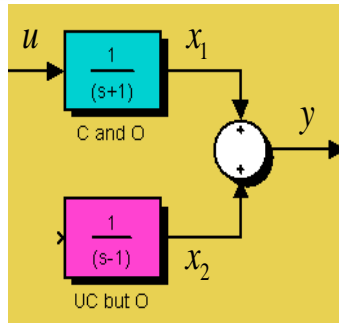
$$\Phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \int_0^t (t - \tau)d\tau \\ \int_0^t d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix}$$
$$y(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$$



Příklad: Divný systém

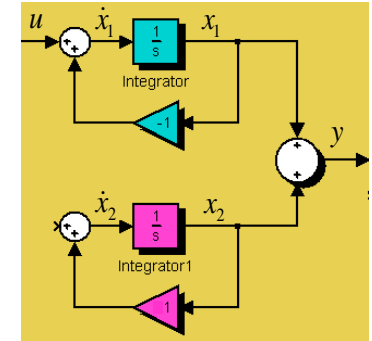
- Blokově



a rovnicemi

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_2$$



- stavový model

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- výpočet řešení (Laplace)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(s) + \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x}(0^-) \\ &= \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} s-1 \\ 0 \end{bmatrix} u(s) + \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0^-) \end{aligned}$$



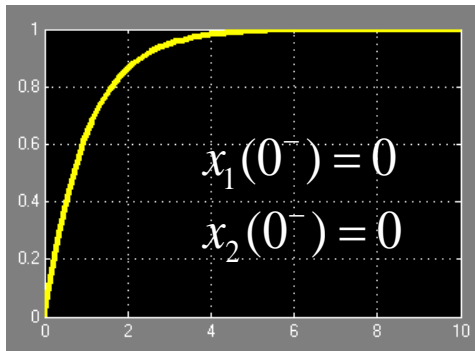
- a výstup je
$$y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-1)}u(s) + \frac{1}{(s+1)(s-1)}[s-1 \quad s+1]\mathbf{x}(0^-)$$
$$= \frac{1}{(s+1)}u(s) + \frac{1}{(s+1)}x_1(0^-) + \frac{1}{(s-1)}x_2(0^-)$$

přenos odezva na počáteční stav

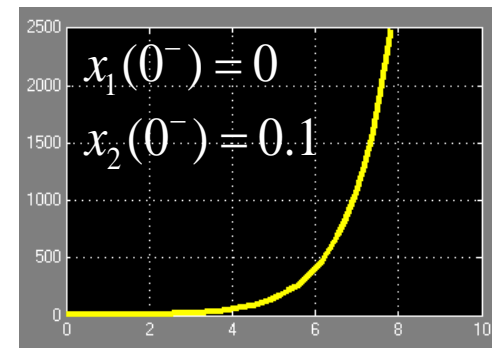
- charakteristický polynom vs. jmenovatel přenosu:

$$p(s) = (s+1)(s-1) \quad \times \quad d(s) = (s+1)$$

- Odezva na skok silně závisí na počátečním stavu nulový



a nenulový počáteční stav

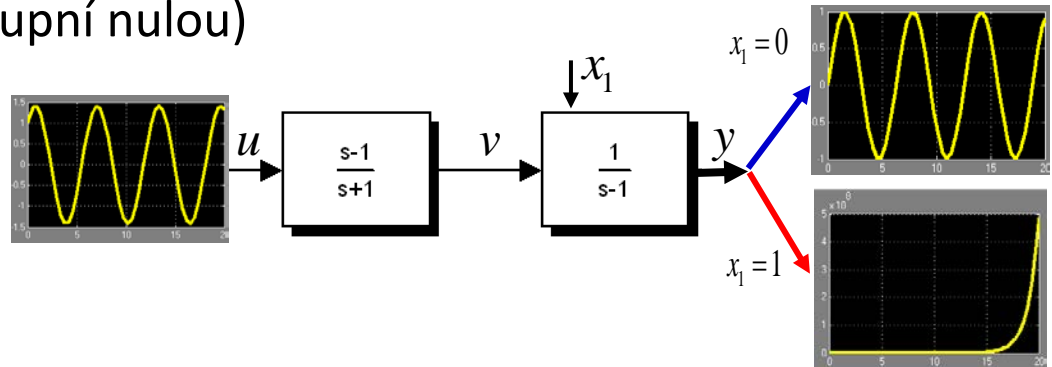




Kaskáda (mód je odblokován vstupní nulou)

- přenos je 1. řádu a stabilní

$$G(s) = \frac{s-1}{s+1} \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s+1}$$



- ale úplný stavový popis je 2. řádu: pro $x_1 = y, x_2 = u - v$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u$$

- charakteristický polynom je $p(s) = \det(sI - A) = (s+1)(s-1)$



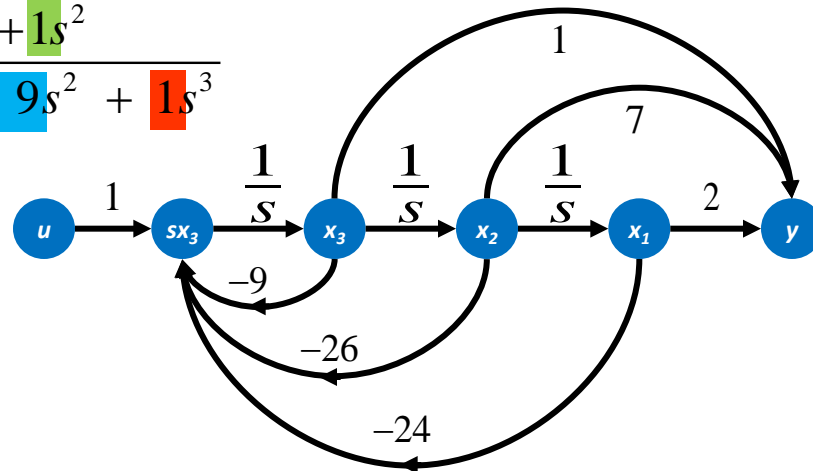
Příklad: Kanonické formy říditelnosti

- Kanonická forma říditelnosti (někdy také forma fázových proměnných)

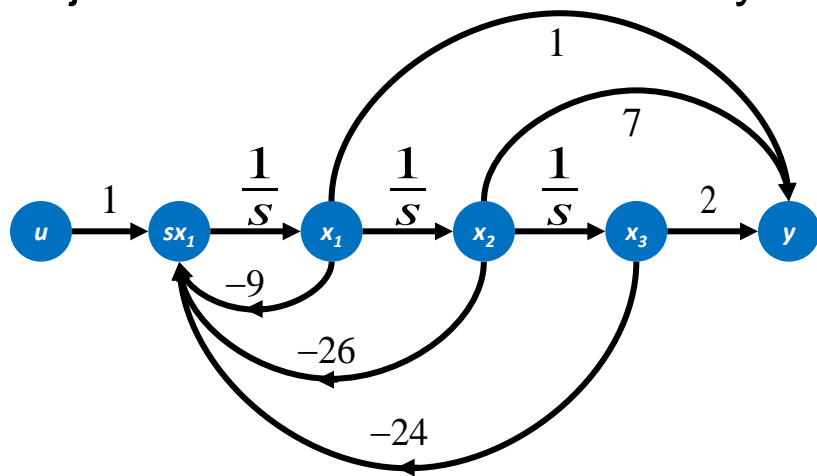
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2 + 7s + s^2}{24 + 26s + 9s^2 + s^3} = \frac{2 + 7s + 1s^2}{24 + 26s + 9s^2 + 1s^3}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [2 \ 7 \ 1] x$$



- jiná varianta kanonická formy říditelnosti - Controller Canonical Form



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1s^2 + 7s + 2}{1s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 7 \ 2] x$$



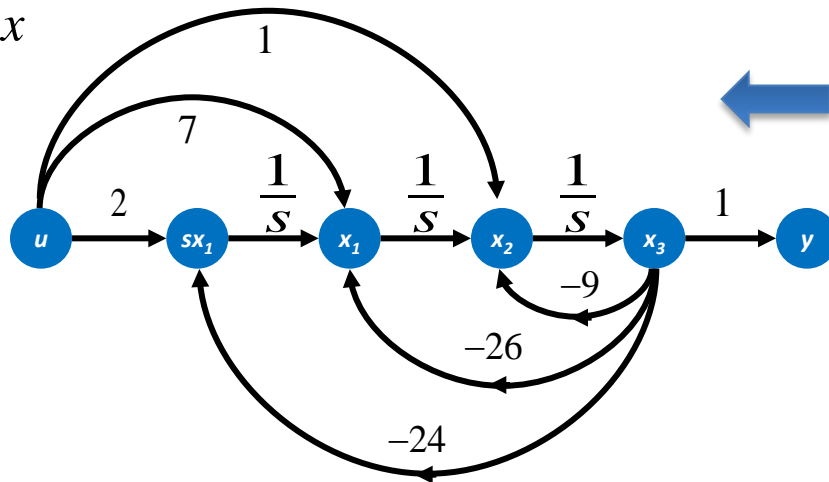
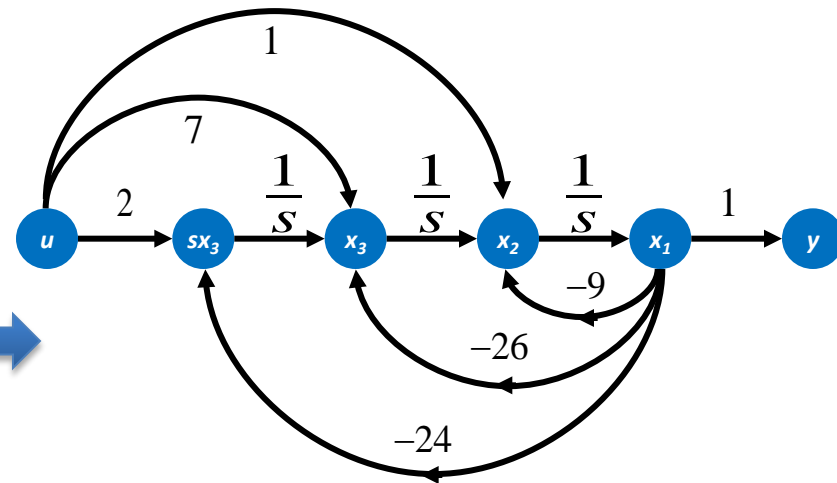
Příklad: Kanonické formy pozorovatelnosti

- Kanonická forma pozorovatelnosti - Observer Canonical Form

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{s} + \frac{7}{s^2} + \frac{2}{s^3}}{1 + \frac{9}{s} + \frac{26}{s^2} + \frac{24}{s^3}}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 \\ -26 & 0 & 1 \\ -24 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] x$$



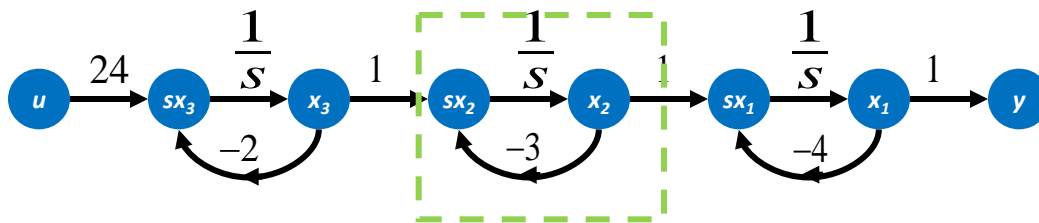
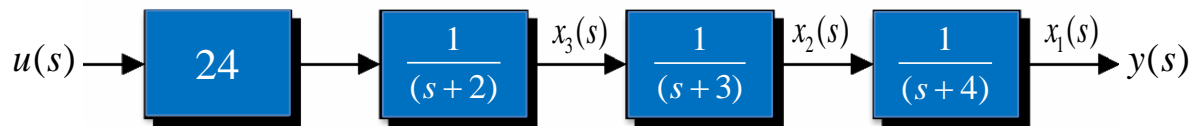
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -24 \\ 1 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] x$$



Příklad: Kaskádní realizace

- Přenos $\frac{y(s)}{u(s)} = F(s) = \frac{24}{24 + 26s + 9s^2 + s^3} = \frac{24}{(s+2)(s+3)(s+4)}$
- Můžeme realizovat jako kaskádu (sérii) subsystémů 1. řádu $= 24 \frac{1}{(s+2)} \frac{1}{(s+3)} \frac{1}{(s+4)}$



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] x$$



Příklad: Paralelní realizace

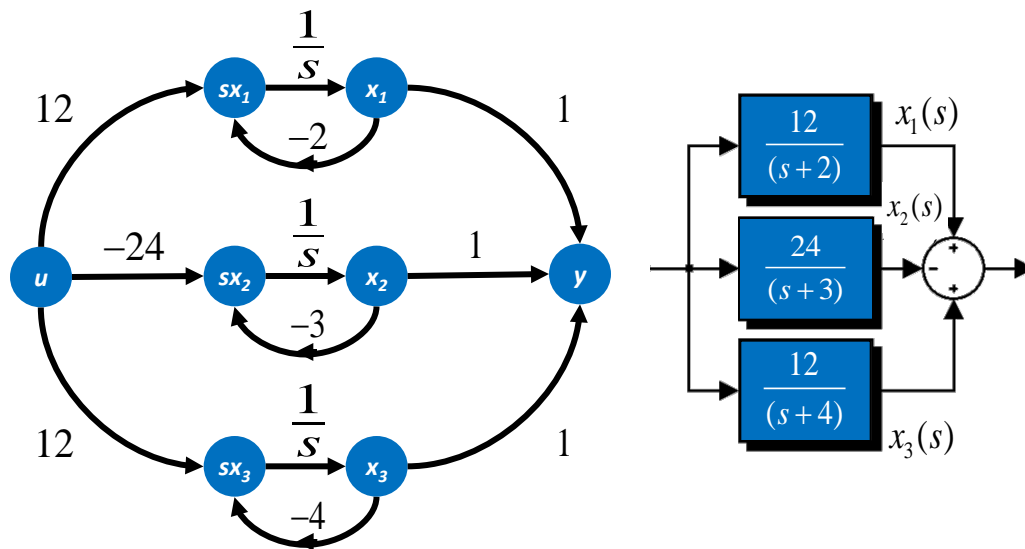
- Přenos

$$\frac{y(s)}{u(s)} = F(s) = \frac{24}{24 + 26s + 9s^2 + s^3} = \frac{24}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

- Můžeme realizovat jako paralelní spojení subsystémů 1. řádu

$$= \frac{12}{(s+2)} - \frac{24}{(s+3)} + \frac{12}{(s+4)}$$

rozklad na parciální zlomky



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 12 \\ -24 \\ 12 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 1] x$$

- jsou-li (faktory) póly násobnosti 1, je stavová matice diagonální (viz Jordanův kanonický tvar matice)

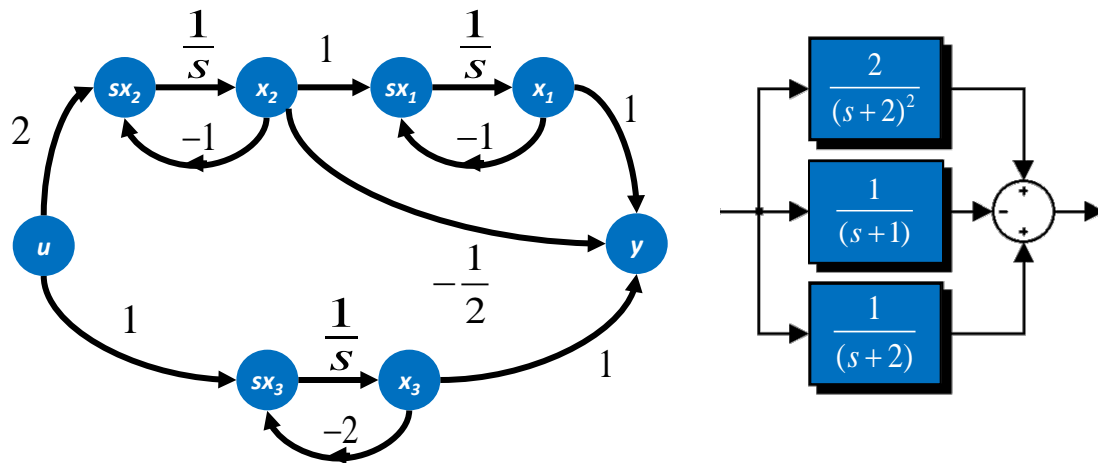


Příklad: Paralelní realizace - vícenásobné póly

- Přenos

$$\frac{y(s)}{u(s)} = F(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

- Můžeme realizovat jako paralelní spojení subsystémů max. 2. řádu



- jsou-li (faktory) póly násobnosti větší než 1,
- nemusí být stavová matice diagonální, ale může být **blokově diagonální**
- Jordanův tvar matice může být složený z bloků větší velikosti než 1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad -1/2 \quad 1] x$$



- Někdy dány oba modely (ve starých a nových souřadnicích) a hledáme \mathbf{T}
- přímo z transformačních vztahů to vypočítat nejde ?

$$\mathbf{A}_{\text{new}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_{\text{old}} \mathbf{T}, \mathbf{B}_{\text{new}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}_{\text{old}}, \mathbf{C}_{\text{new}} = \mathbf{C}_{\text{old}} \mathbf{T}$$

- Transformujme tedy matici

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{new}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{new}} & \mathbf{A}_{\text{new}} \mathbf{B}_{\text{new}} & \dots & \mathbf{A}_{\text{new}}^{n-1} \mathbf{B}_{\text{new}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}_{\text{old}} & (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_{\text{old}} \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}_{\text{old}} & \dots & (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_{\text{old}} \mathbf{T})^{n-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}_{\text{old}} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{old}} & \mathbf{A}_{\text{old}} \mathbf{B}_{\text{old}} & \dots & \mathbf{A}_{\text{old}}^{n-1} \mathbf{B}_{\text{old}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C}_{\text{old}} \end{aligned}$$

a z toho je $\mathbf{T} = \mathbf{C}_{\text{old}} \mathbf{C}_{\text{new}}^{-1}$ pokud inverze existuje

- Obdobně ze vztahu (pokud inverze existuje)

$$\mathbf{T} = \mathbf{O}_{\text{old}}^{-1} \mathbf{O}_{\text{new}}$$

- Neboť platí $\mathbf{O}_{\text{new}} = \mathbf{O}_{\text{old}} \mathbf{T}$ kde obě matice jsou tvaru

$$\mathbf{O}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i \\ \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i \\ \vdots \\ \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i^{n-1} \end{bmatrix}$$

$i = \text{new, old}$



Odezva na vstup a počáteční podmínky

- Odezva na vstupní signál a počáteční stav je celkem

$$y(s) = \frac{[\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{D}]}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} u(s) + \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_0}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{b(s)}{a(s)} \frac{n_u(s)}{d_u(s)} + \frac{c_{x_0}(s)}{a(s)}$$

- kde $a(s)$ je charakteristický polynom systému
 $d_u(s)$ je jmenovatel L-obrazu vstupního signálu
- výstup můžeme rozložit na parciální zlomky / módy takto

$$y(s) = \underbrace{\text{Složky příslušné kořenům } a(s)}_{\text{přirozená odezva}} + \underbrace{\text{Složky příslušné kořenům } d_u(s)}_{\text{nucená odezva}} + \underbrace{\text{složky příslušné kořenům } a(s)}_{\text{odezva na poč. stav}}$$



Použití parciálních zlomků při výpočtu odezvy

Ryzí racionální funkci $n(s)/d(s)$, kde $d(s)$ má kořeny reálné a_i , m_j -násobné reálné b_j komplexní $c_k = -\sigma_k \pm j\omega_k$ a n_l -násobné komplexní $c_l = -\sigma_l \pm j\omega_l$

- a tedy polynom $d(s)$ má rozklad na kořenové činitele

$$d(s) = \prod (s - a_i) \prod (s - b_j)^{m_j} \prod ((s + \sigma_k)^2 + \omega_k^2) \prod ((s + \sigma_l)^2 + \omega_l^2)^{n_l}$$

- nejprve rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{n(s)}{d(s)} = \sum \frac{\alpha_i}{(s - a_i)} + \sum \left(\frac{\beta_{1j}}{(s - b_j)} + \frac{\beta_{2j}}{(s - b_j)^2} + \dots + \frac{\beta_{m_j j}}{(s - b_j)^{m_j}} \right) + \sum \frac{\gamma_k + \delta_k s}{(s + \sigma_k)^2 + \omega_k^2} + \sum \left(\frac{\varepsilon_{1l} + \varphi_{1l} s}{(s + \sigma_l)^2 + \omega_l^2} + \frac{\varepsilon_{2l} + \varphi_{2l} s}{((s + \sigma_l)^2 + \omega_l^2)^2} + \dots + \frac{\varepsilon_{n_l} + \varphi_{n_l} s}{((s + \sigma_l)^2 + \omega_l^2)^{n_l}} \right)$$

- Při zpětné transformaci každý zlomek zpětně transformujeme zvlášť dle vzorců

$$\frac{1}{(s - a_i)} \rightarrow e^{at}, \quad \frac{\omega_k}{(s + \sigma_k)^2 + \omega_k^2} \rightarrow e^{-\sigma t} \sin \omega_k t, \quad \frac{2\omega_k^3}{((s + \sigma_k)^2 + \omega_k^2)^2} \rightarrow e^{-\sigma t} (\sin \omega_k t - \omega_k t \cos \omega_k t)$$

$$\frac{1}{(s - b_j)^{m_j}} \rightarrow \frac{1}{(m_j - 1)!} t^{m_j - 1} e^{bt}, \quad \frac{s + \sigma}{(s + \sigma_k)^2 + \omega_k^2} \rightarrow e^{-\sigma t} \cos \omega_k t, \quad \frac{2\omega_k (s + \sigma)}{((s + \sigma_k)^2 + \omega_k^2)^2} \rightarrow t e^{-\sigma t} \sin \omega_k t$$

- Jednotlivým složkám se říká módy

⋮



Příklad: Odezva na vstup i počáteční stav

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \det(sI - A) = (s + 5)(s + 3)$$

$$y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [1]u, \quad \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- obecná odezva

$$y(s) = \frac{s+2}{s+5} u(s) - \frac{3}{s+5} x_1(0^-) + \frac{1}{s+3} x_2(0^-)$$

- odezva na jednotkový skok a počáteční stav

$$u(s) = \frac{1}{s} \quad y(s) = \frac{s+2}{s+5} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} \quad x_1(0^-) = 0, x_2(0^-) = -1$$

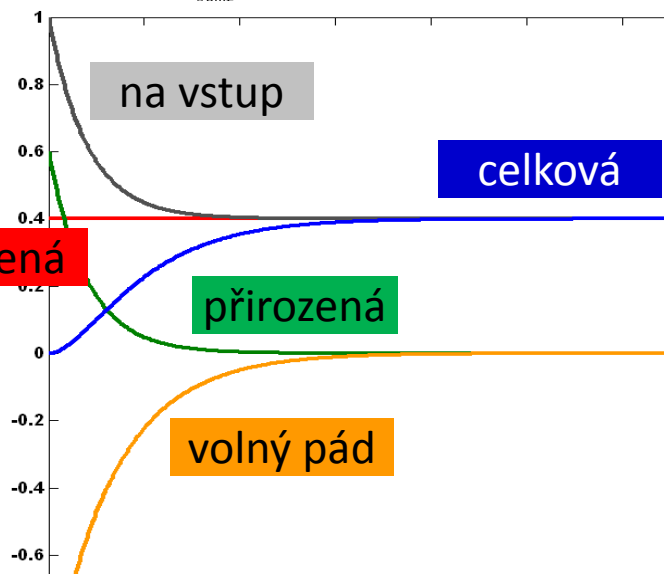
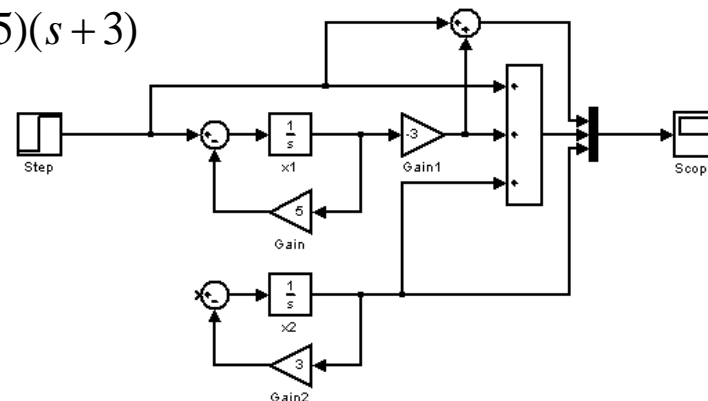
$$y(s) = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5} - \frac{1}{s+3}$$

nucená

přirozená

volný pád

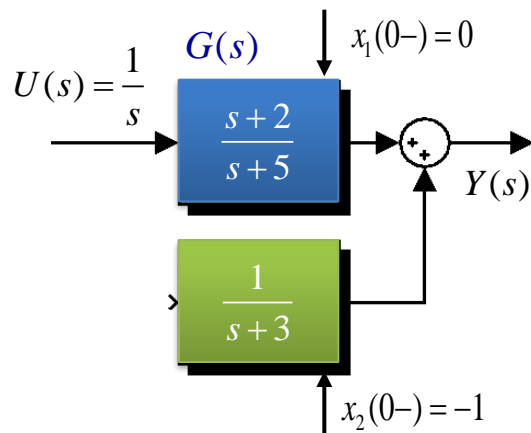
$$y(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} e^{-5t} - e^{-3t}$$



```
t=0:.01:5; nuc=.4*ones(1,length(t));
pri=.6*exp(-5*t);vol=-exp(-3*t);
plot(t,nuc,t,pri,t,vol,t,nuc+pri,...
t,nuc+pri+vol)
```

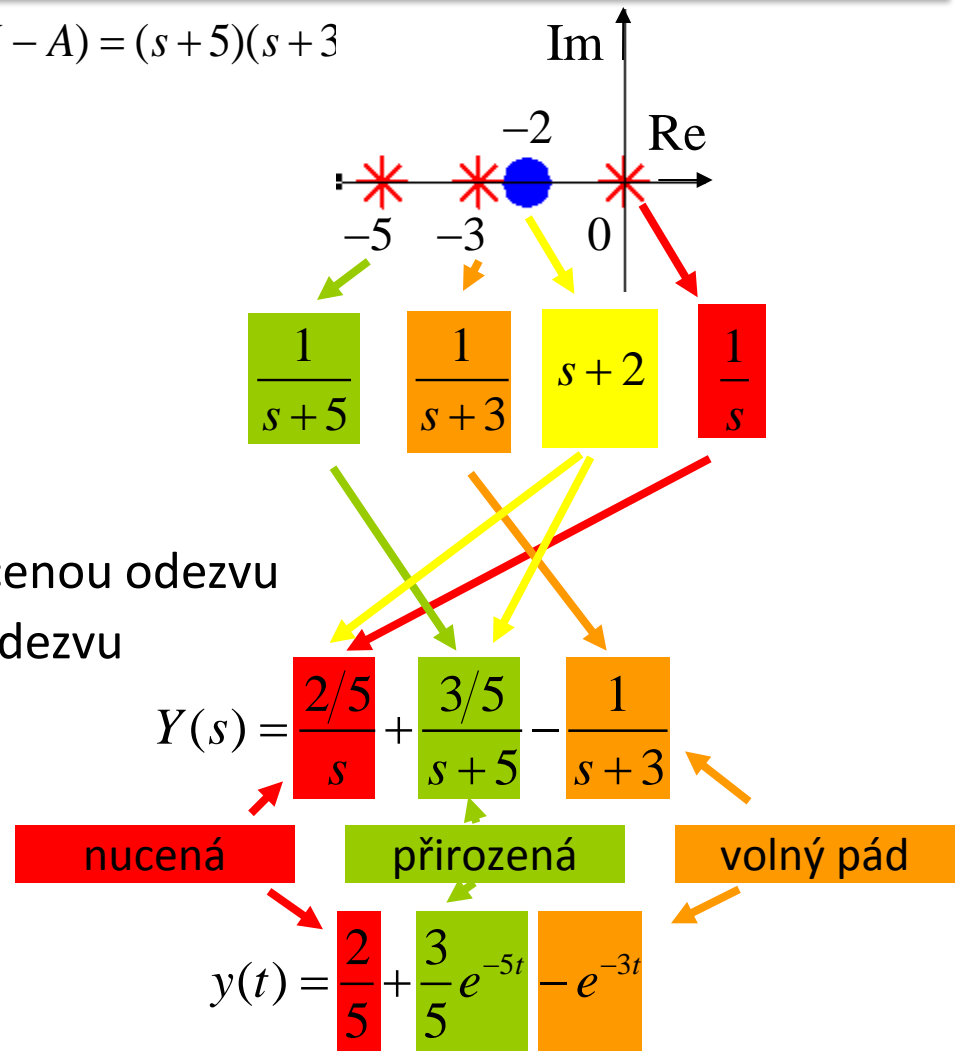


Příklad - pokračování



- pól vstupního signálu generuje nucenou odezvu
- pól přenosu generuje přirozenou odezvu
- pól charakteristického polynomu generuje volnou odezvu
- reálný pól $-a$ generuje exponenciální odezvu e^{-ta}
- nuly a póly kombinují vliv módů

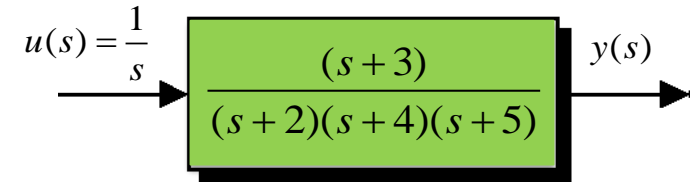
$$\det(sI - A) = (s + 5)(s + 3)$$





Příklad: Odhad odezvy z polohy pólů

- Když nás např. zajímá odezva na skok systému



- můžeme ji jednoduše odhadnout tak, že naznačíme rozklad na parciální zlomky

$$y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+2)} + \frac{K_3}{(s+4)} + \frac{K_4}{(s+5)}$$

- zřejmě „vstupní pól“ generuje **vynucenou** skokovou odezvu a póly přenosu generují jednotlivé exponenciální složky **přirozené** odezvy
- zpětnou L-transformací dostaneme

$$y(t) = K_1 + K_2 e^{-2t} + K_3 e^{-4t} + K_4 e^{-5t}$$

- přestože výpočet konstant není složitý, **konstanty nás často nezajímají**
- mnohdy stačí vědět, které složky odezva obsahuje



Ještě k modelům: změna měřítka amplitudy

- Změna měřítka amplitudy (škálování) zjednodušuje analýzu i návrh
- Odhadneme maximální očekávané/povolené hodnoty změn signálů v pracovním režimu
- Vyjdeme z odchytkového modelu (přenosu) $\Delta y = G_{\Delta} \Delta u + G_{d\Delta} \Delta d$
vzniklého třeba lineární aproximací
- a velikost každé veličiny „stlačíme pod 1“ vydělením maximální odhadnutou nebo povolenou odchylkou $u = \frac{\Delta u}{\Delta_{\max} u}, d = \frac{\Delta d}{\Delta_{\max} d}$
- Δy musíme škálovat společně s $\Delta e, \Delta r$ neboť mají stejné jednotky a jsou vázány $\Delta e = \Delta r - \Delta y$
- Můžeme použít $\Delta_{\max} r$ nebo častěji $\Delta_{\max} e$: $y = \frac{\Delta y}{\Delta_{\max} e}, r = \frac{\Delta r}{\Delta_{\max} e}, e = \frac{\Delta e}{\Delta_{\max} e}$
Postup formalizujeme použitím faktorů
 $D_e = \Delta_{\max} e, D_u = \Delta_{\max} u, D_d = \Delta_{\max} d, D_r = \Delta_{\max} r$
a dosazením dostaneme $y = D_e^{-1} G_{\Delta} D_u u + D_e^{-1} G_{d\Delta} D_d d, e = y - r$
- Někdy k tomu ještě zavedeme škálovanou referenci.
 $\tilde{r} = \Delta r / \Delta_{\max} r = D_r^{-1} \Delta r \Rightarrow r = D_e^{-1} \Delta r = D_r D_e^{-1} \tilde{r}$
- Pak je $|d(t)| \leq 1, |\tilde{r}(t)| \leq 1$ a pomocí $|u(t)| \leq 1$ usilujeme o $|e(t)| \leq 1$



Příklad: Vytápění pokoje

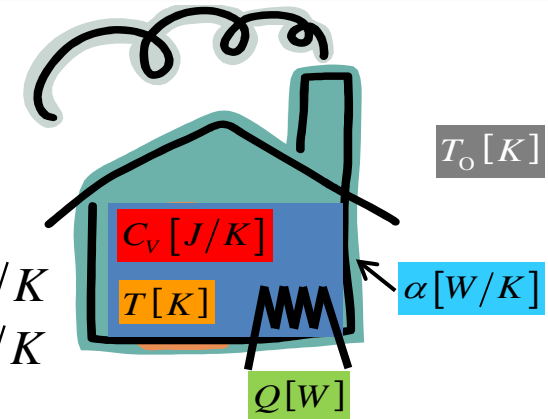
- energetická rovnováha:
změna energie v pokoji = přítoku energie
(zanedbáváme akumulaci ve stěnách)

$$\frac{d}{dt}(C_V T) = Q + \alpha(T_0 - T)$$

změna přívod ztráty do
 tepla uvnitř tepla okolí

$$\alpha = 100 \text{ W/K}$$

$$C_{V,p} = 100 \text{ kJ/K}$$



tepelná kapacita pokoje [J/K]	teplota pokoje [K]	přívod tepla [W]	koeficient přestupu tepla [W/K]	venkovní teplota [K]
-------------------------------	--------------------	------------------	---------------------------------	----------------------

- zavedeme $\tau = C_V / \alpha = 10^5 / 10^2 = 1000 \text{ s}$
a uděláme LT pro nulovou pp. $\Delta T(0^-) = 0$

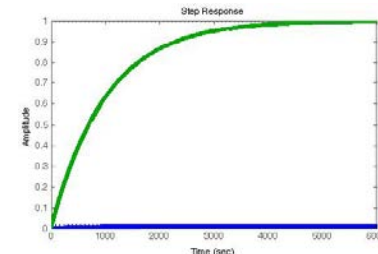
$$\Delta T(s) = \frac{1/\alpha}{\tau s + 1} \Delta Q + \frac{1}{\tau s + 1} \Delta T_0$$

$$\Delta T(s) = \frac{0.01}{1000s + 1} \Delta Q + \frac{1}{1000s + 1} \Delta T_0$$

- pracovní bod
 $Q_p = 2 \text{ kW}, T_p - T_{0,p} = 20 \text{ K}$
- odchylkový model

$$\Delta T = T - \hat{T}, \dots$$

$$\left(C_V \frac{d}{dt} + \alpha \right) \Delta T = \Delta Q + \alpha \Delta T_0$$





- Zavedeme relativní bezrozměrné proměnné

$$y(s) = \frac{\Delta T(s)}{\Delta T_{\max}}; u(s) = \frac{\Delta Q(s)}{\Delta Q_{\max}}; d(s) = \frac{\Delta T_O(s)}{\Delta T_{O,\max}}$$

kde ze zadání $\Delta T_{\max} = 1 K$; $\Delta Q_{\max} = 2 kW$; $\Delta T_{O,\max} = 10 K$

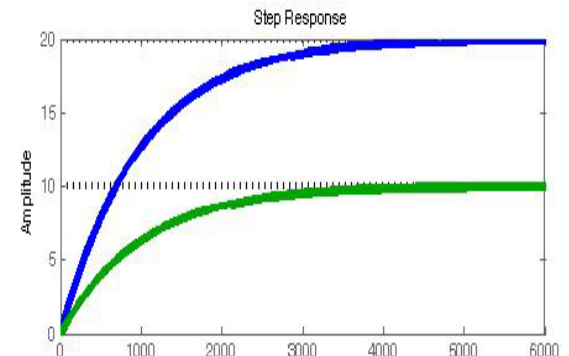
- operacemi

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta T_{\max}} = \frac{1}{\tau s + 1} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\Delta T_{\max}} \frac{\Delta Q_{\max}}{\Delta Q_{\max}} \Delta Q + \frac{1}{\tau s + 1} \frac{1}{\Delta T_{\max}} \frac{\Delta T_{O,\max}}{\Delta T_{O,\max}} \Delta T_O$$

- dostaneme

$$y(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta Q_{\max}}{\Delta T_{\max}} u(s) + \frac{1}{\tau s + 1} \frac{\Delta T_{O,\max}}{\Delta T_{\max}} d(s)$$

$$y(s) = \frac{20}{1000s + 1} u(s) + \frac{10}{1000s + 1} d(s)$$





Ještě k modelům: změna časového měřítka

- Čas většinou měříme v sekundách, ale počítání s velmi rychlými nebo pomalými systémy může být špatně podmíněné a numerický výpočet může být chybný
- Je proto užitečné umět změnit jednotku času. Například mezi časem t [s] a časem τ [ms] platí vztah $\tau = kt$ kde $k = 1000$
- Dopad na derivování je

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d(\tau/k)} = k \frac{dx}{d\tau}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = k^2 \frac{d^2x}{d\tau^2}, \dots$$

- a tak se stavová rovnice transformuje na

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow \dot{x}(\tau) = \frac{1}{k} Ax(\tau) + \frac{1}{k} Bu(\tau)$$

- Jí v „měřítku času τ “

$$g(s_\tau) = (s_\tau \mathbf{I} - \mathbf{A}_\tau)^{-1} \mathbf{B}_\tau = (s_\tau \mathbf{I} - \mathbf{A}/k)^{-1} \mathbf{B}/k = (s_\tau k \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$$

- Tedy $s = s_\tau k$ což odpovídá, neboť proměnná s v LT má rozměr „1/čas“
- Dále platí pro časové konstanty $T_\tau = kT$



Příklad: změna časového měřítka

- Rychlý oscilátor s přirozenou frekvencí $\omega_n = 15.000 \text{ rad/s}$ (asi 2 kHz) s

$$\ddot{\varphi}(t) + 15.000^2 \varphi(t) = 10^6 u(t)$$

- Změníme-li jednotku času ze sekundy na milisekundu ($\tau = 1000t$)

- Pak a „rovnice v milisekundách“ je

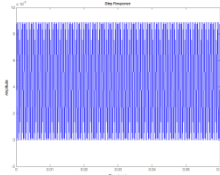
$$\ddot{\varphi}(t) = 10^6 \frac{d^2 \varphi(\tau)}{d\tau^2} \quad \frac{d^2 \varphi(\tau)}{d\tau^2} + 15^2 \varphi(\tau) = u(\tau)$$

- Z první rovnice dostaneme přenos, ze druhé

$$y(s) = \frac{10^6}{s^2 + 15.000^2} u(s) \quad y(s_\tau) = \frac{1}{s_\tau^2 + 15^2} u(s)$$

- Z porovnání je zřejmé, že $s = 1000s_\tau$

- Změna ve stavovém modelu (pro $x_1 = \varphi, \dot{x}_2 = \ddot{\varphi}$) je



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15^2 \times 1000^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10^6 \end{bmatrix} u(t) \quad \longrightarrow \quad g(s) = \frac{10^6}{s^2 + 15.000^2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(\tau) \\ \dot{x}_2(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.001 \\ -15^2 \times 1000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10^3 \end{bmatrix} u(\tau) \quad \longrightarrow \quad g(s_\tau) = \frac{1}{s_\tau^2 + 15^2}$$



CSTbx:

- (lti) ss, tf, zpk
- step, impulse, initial, ...

PolTbx:

- sdf, (ldf, rdf, mdf), abcd, pol
- num, den

SymbMathTbx:

- symbolické výpočty
- laplace, ilaplace