OPERAČNÍ PROGRAM PRAHA
ADAPTABILITA

EVROPSKÁ UNIE

Příklady k přednášce
2 - Spojité modely

Michael Šebek

Automatické řízení 2019

20.02.2019

Řešení stavové rovnice

- Řešení v časové oblasti

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

$$= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

odezva na počáteční stav

odezva na vstupní signál

- platí pro $\boldsymbol{D} = 0$
- podobně na výstupu

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$= \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Stavová matice přechodu

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

- z řešení pomocí LT plyne

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

- porovnáním

$$\mathcal{L}\{\mathbf{\Phi}(t)\} = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$$

- prvky jsou součty exponenciál generovaných vlastními čísly $\boldsymbol{A}$
- příslušné konstanty vypočteme z $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}, \dot{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{A}$
- nebo zpětnou LT

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}_{-}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}\right\}$$

- můžeme ji také vypočítat z řady

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \cdots + \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} + \cdots$$

podobně jako $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

Řešení stavové rovnice v časové oblasti

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad x(0^-) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(t) = 1(t)$$

- Při řešení v časové oblasti najdeme vlastní čísla

$$p(s) = \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = s^2 + 6s + 8 \rightarrow s_1 = -2, s_2 = -4$$

- a předpokládáme stavovou matici přechodu ve tvaru

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t} & K_3 e^{-2t} + K_4 e^{-4t} \\ K_5 e^{-2t} + K_6 e^{-4t} & K_7 e^{-2t} + K_8 e^{-4t} \end{bmatrix}$$

- Konstanty najdeme ze známých vlastností matice

$$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I} \Rightarrow K_1 + K_2 = 1, K_3 + K_4 = 0, K_5 + K_6 = 0, K_7 + K_8 = 1$$

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{A} \Rightarrow -2K_1 - 4K_2 = 0, -2K_3 - 4K_4 = 1, -2K_5 - 4K_6 = -8, -2K_7 - 4K_8 = -6$$

- takže

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{-4t} & -e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Řešení stavové rovnice v časové oblasti

- a odezva na počáteční stav je $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{-4t} \end{bmatrix}$

- dále $\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)} - \frac{1}{2}e^{-4(t-\tau)} \\ -e^{-2(t-\tau)} + 2e^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix}$ a z toho

$$\int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau - \frac{1}{2}e^{-4t}\int_0^t e^{4\tau}d\tau \\ -e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau + 2e^{-4t}\int_0^t e^{4\tau}d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{-4t} \\ +\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

- Takže celková odezva je

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} + \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{7}{8}e^{-4t} \\ -\frac{7}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Řešení Laplaceovou transformací

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -6\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t),\quad x(0^-)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad u(t)=1(t)$$

$$\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)=\begin{bmatrix}s & -1\\ 8 & s+6\end{bmatrix}\Rightarrow\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}s+6 & 1\\ -8 & s\end{bmatrix}}{s^2+6s+8}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+6}{s^2+6s+8} & \dfrac{1}{s^2+6s+8}\\ \dfrac{-8}{s^2+6s+8} & \dfrac{s}{s^2+6s+8}\end{bmatrix}$$

- Obraz odezvy je celkem

$$\mathbf{x}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\left(s^2+6s+8\right)s}\\ \dfrac{s}{\left(s^2+6s+8\right)s}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{s+6}{s^2+6s+8}\\ \dfrac{-8}{s^2+6s+8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2+6s+1}{\left(s^2+6s+8\right)s}\\ \dfrac{-7s}{\left(s^2+6s+8\right)s}\end{bmatrix}$$

- a časový průběh odezvy je stejný jako v minulém řešení

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2+6s+1}{s(s+2)(s+4)}\\ \dfrac{-7s}{s(s+2)(s+4)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{8s}+\dfrac{7}{4(s+2)}-\dfrac{7}{8(s+4)}\\ -\dfrac{7}{2(s+2)}+\dfrac{7}{2(s+4)}\end{bmatrix}$$

Řešení Laplaceovou transformací

- Dále: z rozkladu na parciální zlomky

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+6}{s^2+6s+8} & \dfrac{1}{s^2+6s+8}\\ \dfrac{-8}{s^2+6s+8} & \dfrac{s}{s^2+6s+8}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+2}-\dfrac{1}{s+4} & \dfrac{1}{2(s+2)}-\dfrac{1}{2(s+4)}\\ -\dfrac{4}{s+2}+\dfrac{4}{s+4} & -\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{2}{s+4}\end{bmatrix}$$

je zřejmé, že to je obraz stavové matice přechodu

```
>> Fis=inv([s 0;0 s]-A)
Fis =
      6 + s       1
     -8           s
     ------------
     8 + 6s + s^2
>> x=Fis*([1;0]+[0;1/s])
x =
       1 + 6s + s^2
      -7s
     ---------------
     8s + 6s^2 + s^3
>> x1=partial(x(1))
x1 =
      -7/8     7/4     1/8
     -----    -----    ---
     4 + s    2 + s     s
>> x2=partial(x(2))
x2 =
      7/2    -7/2
     -----   -----
     4 + s   2 + s

>> Fi11=partial(Fis(1,1))
Fi11 =
       -1      2
     -----   -----
     4 + s   2 + s
```

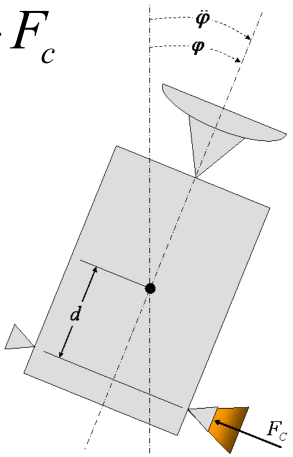
Příklad: Směrování satelitu

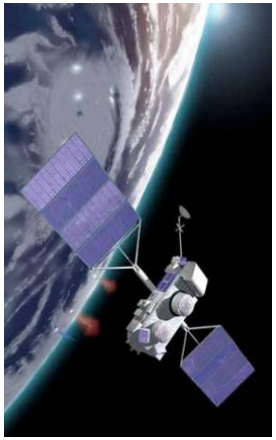
- IO model $J\ddot{\varphi} = F_C d \quad \dot{\varphi} = \omega, \dot{\omega} = \dfrac{d}{J} F_c$
- Stavový model

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix}, u = \frac{d}{J} F_c, y = \varphi$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$





- Charakteristický polynom

$$p(s) = \det\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right) = s^2$$

- a řešení stavových rovnic L-transformací

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(s) = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} u(s) + \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \mathbf{x}(0^-)$$

$$y(s) = \frac{1}{s^2} u(s) + \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0^-)$$

Příklad: Směrování satelitu

- Stavová matice přechodu $\det(sI - A) = s^2$ $\Rightarrow$ $\Phi(t) = \begin{bmatrix} k_{11} + l_{11}t & k_{12} + l_{12}t \\ k_{21} + l_{21}t & k_{22} + l_{22}t \end{bmatrix}$

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = I \quad \dot{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = A$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}\right\} \qquad \Phi(t-\tau) = \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

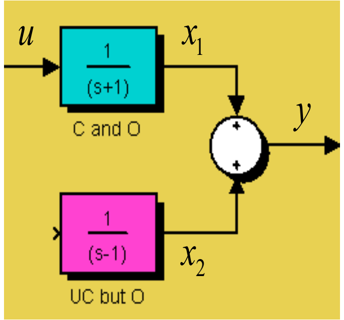
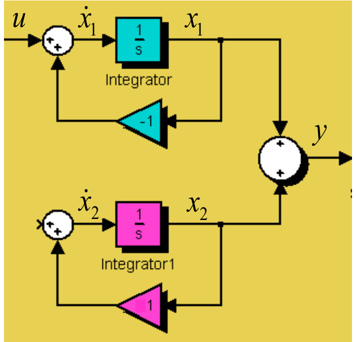
$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u(t) = 1(t)$$

- Řešení v časové oblasti pro

$$\Phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \int_0^t (t-\tau)d\tau \\ \int_0^t d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix} \\ y(t) = 1 + \dfrac{t^2}{2} \end{gathered}}$$

Příklad: Divný systém

- Blokově  a rovnicemi $\dot{x}_1 = -x_1 + u$, $\dot{x}_2 = x_2$ 

- stavový model

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- výpočet řešení (Laplace)

$$\mathbf{x}(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(s) + \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x}(0^-)$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} s-1 \\ 0 \end{bmatrix} u(s) + \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0^-)$$

Příklad: Divný systém

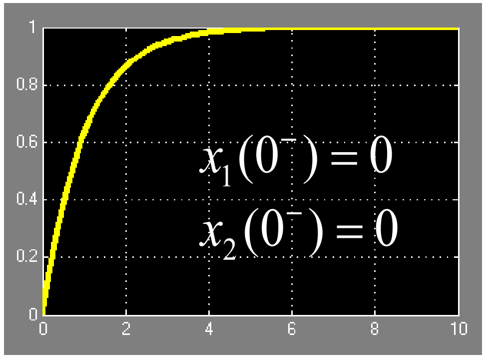
- a výstup je
$$y(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s-1)}u(s)+\frac{1}{(s+1)(s-1)}\begin{bmatrix}s-1 & s+1\end{bmatrix}\mathbf{x}(0^-)$$
$$=\boxed{\frac{1}{(s+1)}}u(s)+\boxed{\frac{1}{(s+1)}}x_1(0^-)+\boxed{\frac{1}{(s-1)}}x_2(0^-)$$

přenos odezva na počáteční stav

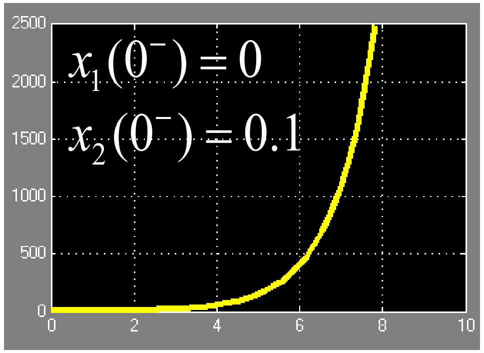
- charakteristický polynom vs. jmenovatel přenosu:
$$p(s)=(s+1)\boxed{(s-1)} \quad \times \quad d(s)=(s+1)$$

- Odezva na skok silně závisí na počátečním stavu

nulový

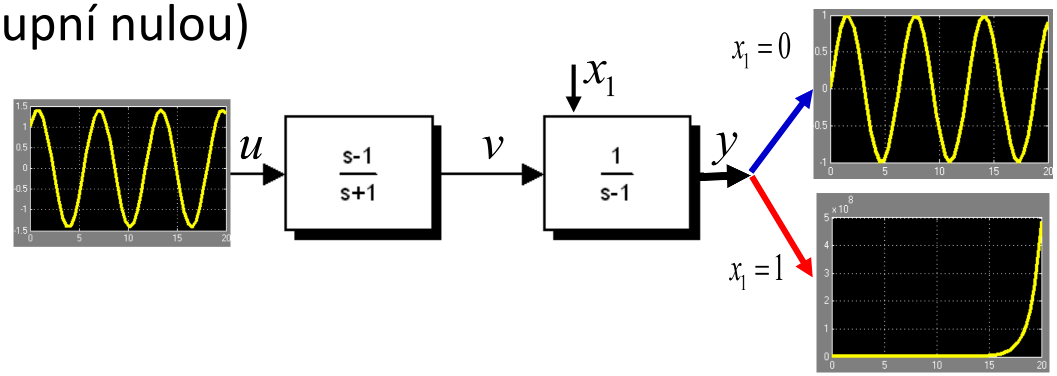


a nenulový počáteční stav



Příklad: Jiný divný systém

Kaskáda (mód je odblokován vstupní nulou)



- přenos je 1. řádu a stabilní

$$G(s) = \frac{s-1}{s+1}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s+1}$$

- ale úplný stavový popis je 2. řádu: pro $x_1 = y, x_2 = u - v$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [1]u$$

- charakteristický polynom je $p(s) = \det(sI - A) = (s+1)(s-1)$

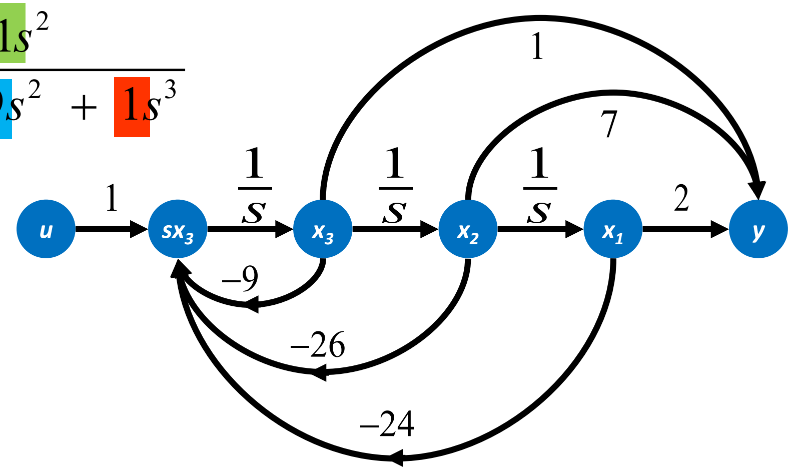
Příklad: Kanonické formy řiditelnosti

- Kanonická forma řiditelnosti (někdy také forma fázových proměnných)

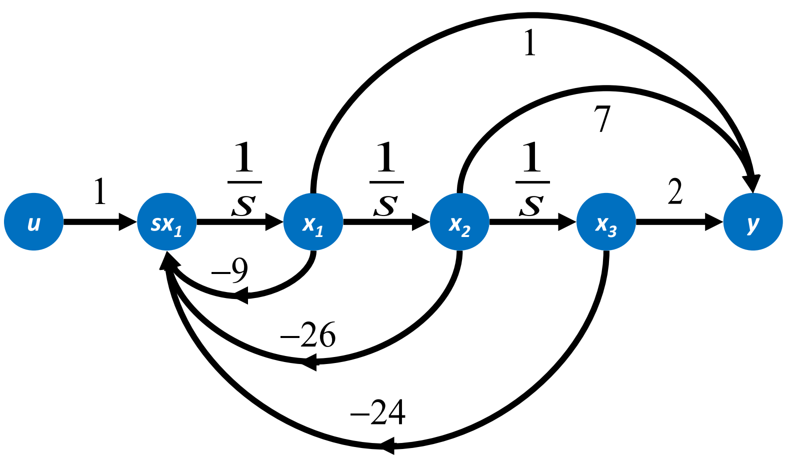
$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{2+7s+s^2}{24\;+\;26s\;+\;9s^2\;+\;s^3}=\frac{2+7s+1s^2}{24\;+\;26s\;+\;9s^2\;+\;1s^3}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -24 & -26 & -9\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & 7 & 1\end{bmatrix}x$$



- jiná varianta kanonická formy řiditelnosti - Controller Canonical Form



$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1s^2+7s+2}{1s^3\;+\;9s^2\;+26s\;+24}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-9 & -26 & -24\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 7 & 2\end{bmatrix}x$$

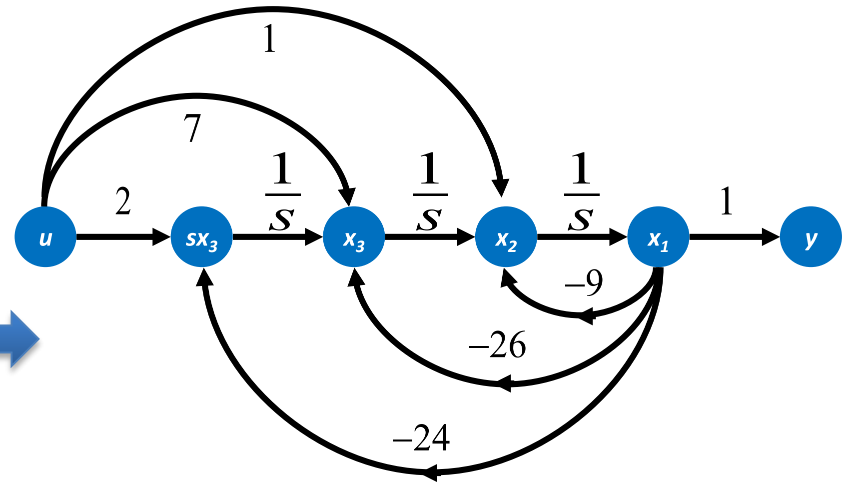
Příklad: Kanonické formy pozorovatelnosti

- Kanonická forma pozorovatelnosti - Observer Canonical Form

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\frac{1}{s}+\frac{7}{s^2}+\frac{2}{s^3}}{1+\frac{9}{s}+\frac{26}{s^2}+\frac{24}{s^3}}$$

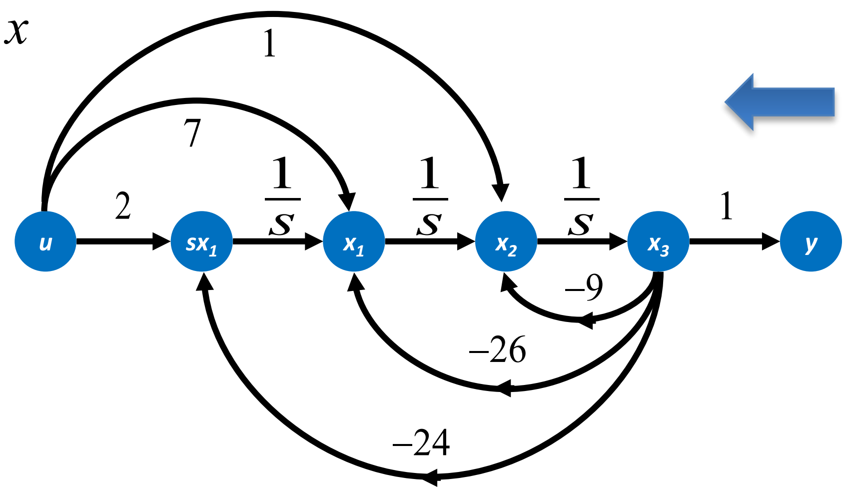
$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-9 & 1 & 0\\ -26 & 0 & 1\\ -24 & 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 7\\ 2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$



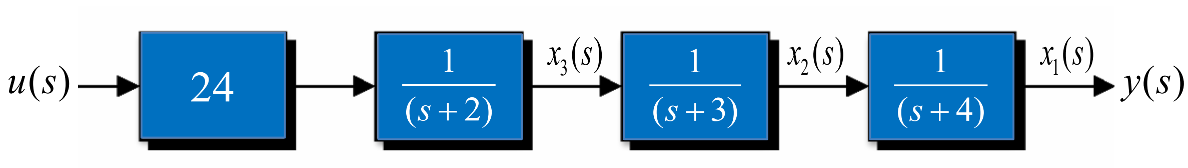
$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -24\\ 1 & 0 & -26\\ 0 & 1 & -9\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 7\\ 1\end{bmatrix}u$$

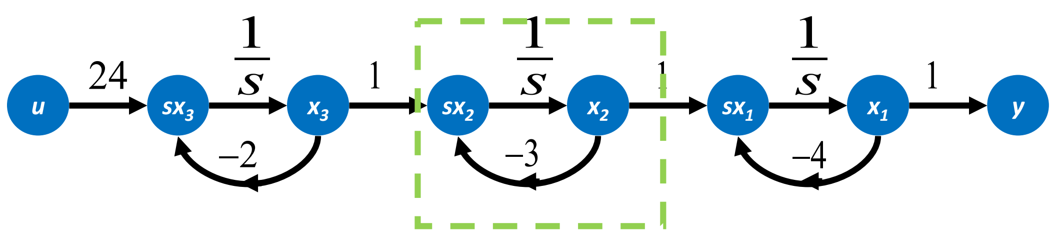
$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$



Příklad: Kaskádní realizace

- Přenos $$\frac{y(s)}{u(s)} = F(s) = \frac{24}{24 + 26s + 9s^2 + s^3} = \frac{24}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$
- Můžeme realizovat jako kaskádu (sérii) subsystémů 1. řádu $$= 24\frac{1}{(s+2)}\frac{1}{(s+3)}\frac{1}{(s+4)}$$





$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} u$$

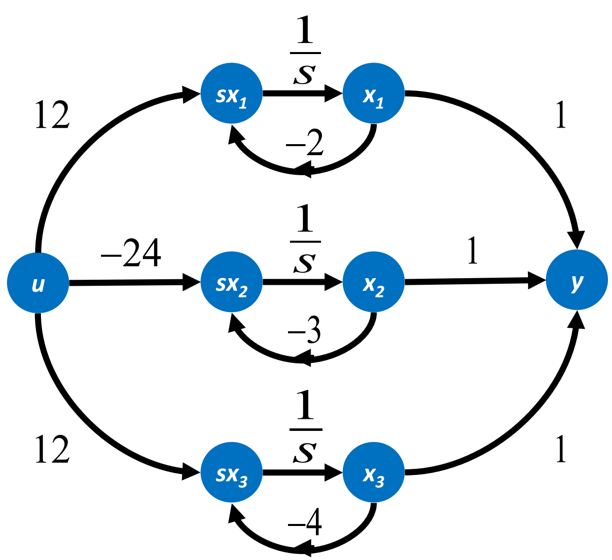
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

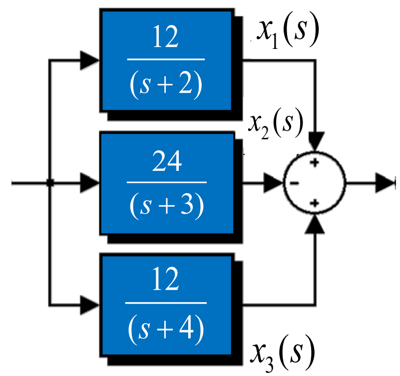
Příklad: Paralelní realizace

- Přenos $$\frac{y(s)}{u(s)} = F(s) = \frac{24}{24 + 26s + 9s^2 + s^3} = \frac{24}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

- Můžeme realizovat jako paralelní spojení subsystémů 1. řádu $$= \frac{12}{(s+2)} - \frac{24}{(s+3)} + \frac{12}{(s+4)}$$

rozklad na parciální zlomky





$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 12 \\ -24 \\ 12 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

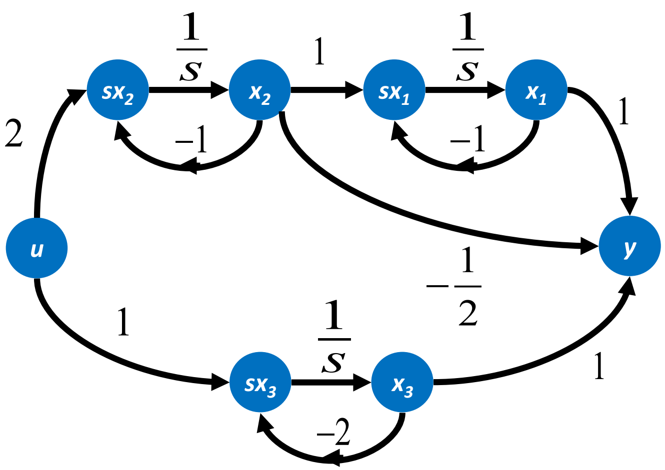
- jsou-li (faktory) póly násobnosti 1, je stavová matice diagonální (viz Jordanův kanonický tvar matice)

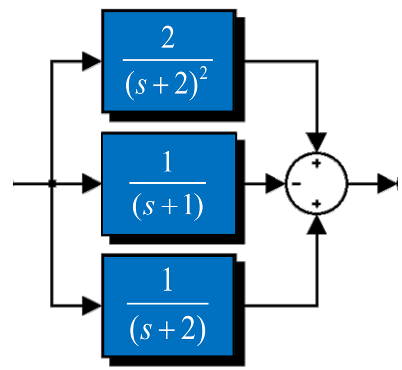
Příklad: Paralelní realizace - vícenásobné póly

- Přenos

$$\frac{y(s)}{u(s)} = F(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)}$$

- Můžeme realizovat jako paralelní spojení subsystémů max. 2. řádu





$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} x$$

- jsou-li (faktory) póly násobnosti větší než 1,
- nemusí být stavová matice diagonální, ale může být blokově diagonální
- Jordanův tvar matice může být složený z bloků větší velikosti než 1

Výpočet transformační matice

- Někdy dány oba modely (ve starých a nových souřadnicích) a hledáme $\mathbf{T}$
- přímo z transformačních vztahů to vypočítat nejde ?

$$\mathbf{A}_{\text{new}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{old}}\mathbf{T}, \mathbf{B}_{\text{new}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_{\text{old}}, \mathbf{C}_{\text{new}} = \mathbf{C}_{\text{old}}\mathbf{T}$$

- Transformujme tedy matici

$$\begin{aligned} C_{\text{new}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{new}} & \mathbf{A}_{\text{new}}\mathbf{B}_{\text{new}} & \cdots & \mathbf{A}_{\text{new}}^{n-1}\mathbf{B}_{\text{new}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_{\text{old}} & \left(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{old}}\mathbf{T}\right)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_{\text{old}} & \cdots & \left(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{old}}\mathbf{T}\right)^{n-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_{\text{old}} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{old}} & \mathbf{A}_{\text{old}}\mathbf{B}_{\text{old}} & \cdots & \mathbf{A}_{\text{old}}^{n-1}\mathbf{B}_{\text{old}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}C_{\text{old}} \end{aligned}$$

a z toho je $\boxed{\mathbf{T} = C_{\text{old}}C_{\text{new}}^{-1}}$ pokud inverze existuje

- Obdobně ze vztahu (pokud inverze existuje)

$$\boxed{\mathbf{T} = O_{\text{old}}^{-1}O_{\text{new}}}$$

- Neboť platí $O_{\text{new}} = O_{\text{old}}\mathbf{T}$ kde obě matice jsou tvaru

$$O_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i \\ \mathbf{C}_i\mathbf{A}_i \\ \vdots \\ \mathbf{C}_i\mathbf{A}_i^{n\text{-}1} \end{bmatrix}$$

$$i = \text{new}, \text{old}$$

Použití parciálních zlomků při výpočtu odezvy

Ryzí racionální funkci $n(s)/d(s)$, kde $d(s)$ má kořeny reálné a_i , m_j-násobné reálné b_j komplexní $c_k = -\sigma_k \pm j\omega_k$ a n_l -násobné komplexní $c_l = -\sigma_l \pm j\omega_l$

- a tedy polynom $d(s)$ má rozklad na kořenové činitele

$$d(s) = \prod (s - a_i) \prod (s - b_j)^{m_j} \prod \left((s+\sigma_k)^2 + \omega_k^2 \right) \prod \left((s+\sigma_l)^2 + \omega_l^2 \right)^{n_l}$$

- nejprve rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{n(s)}{d(s)} = \sum \frac{\alpha_i}{(s-a_i)} + \sum \left(\frac{\beta_{1j}}{(s-b_j)} + \frac{\beta_{2j}}{(s-b_j)^2} + \cdots + \frac{\beta_{m_j j}}{(s-b_j)^{m_j}} \right)$$

$$+ \sum \frac{\gamma_k + \delta_k s}{(s+\sigma_k)^2 + \omega_k^2} + \sum \left(\frac{\varepsilon_{1l} + \varphi_{1l} s}{(s+\sigma_l)^2 + \omega_l^2} + \frac{\varepsilon_{2l} + \varphi_{2l} s}{((s+\sigma_l)^2 + \omega_l^2))^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n_l l} + \varphi_{n_l l} s}{((s+\sigma_l)^2 + \omega_l^2))^{n_l}} \right)$$

- Při zpětné transformaci každý zlomek zpětně transformujeme zvlášť dle vzorců

$$\frac{1}{(s-a_i)} \to e^{at}, \qquad \frac{\omega_k}{(s+\sigma_k)^2 + \omega_k^2} \to e^{-\sigma t} \sin \omega_k t, \qquad \frac{2\omega_k^3}{((s+\sigma_k)^2 + \omega_k^2)^2} \to e^{-\sigma t} \left(\sin \omega_k t - \omega_k t \cos \omega_k t \right)$$

$$\frac{1}{(s-b_j)^{m_j}} \to \frac{1}{(m_j - 1)!} t^{m_j - 1} e^{bt}, \qquad \frac{s+\sigma}{(s+\sigma_k)^2 + \omega_k^2} \to e^{-\sigma t} \cos \omega_k t, \qquad \frac{2\omega_k (s+\sigma)}{((s+\sigma_k)^2 + \omega_k^2)^2} \to t e^{-\sigma t} \sin \omega_k t$$

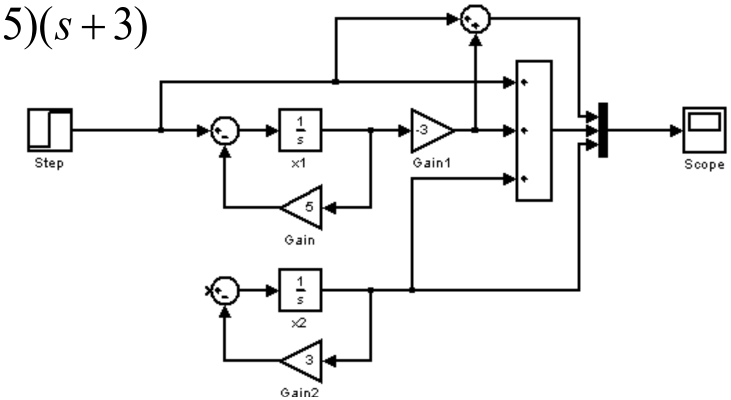
$$\vdots$$

- Jednotlivým složkám se říká módy

Příklad: Odezva na vstup i počáteční stav

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u \qquad \det(sI-A)=(s+5)(s+3)$$

$$y=\begin{bmatrix}-3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[1]u,\quad \begin{bmatrix}x_1(0-)\\ x_2(0-)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$$



- obecná odezva

$$y(s)=\frac{s+2}{s+5}u(s)-\frac{3}{s+5}x_1(0-)+\frac{1}{s+3}x_2(0-)$$

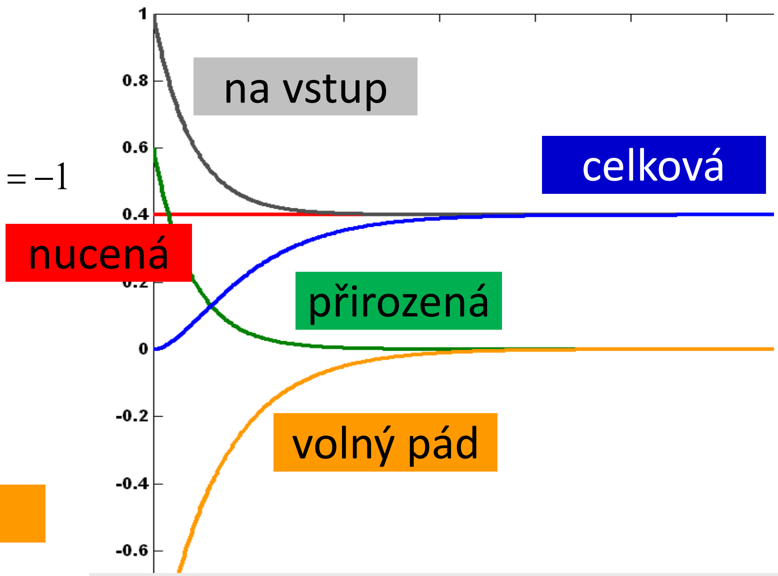
- odezva na jednotkový skok a počáteční stav

$$u(s)=\frac{1}{s} \qquad y(s)=\frac{s+2}{s+5}\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3} \qquad x_1(0^-)=0, x_2(0^-)=-1$$

$$y(s)=\frac{2/5}{s}+\frac{3/5}{s+5}-\frac{1}{s+3}$$

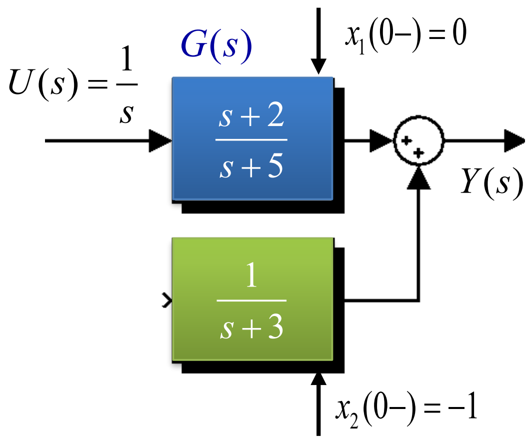
nucená přirozená volný pád

$$y(t)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}e^{-5t}-e^{-3t}$$

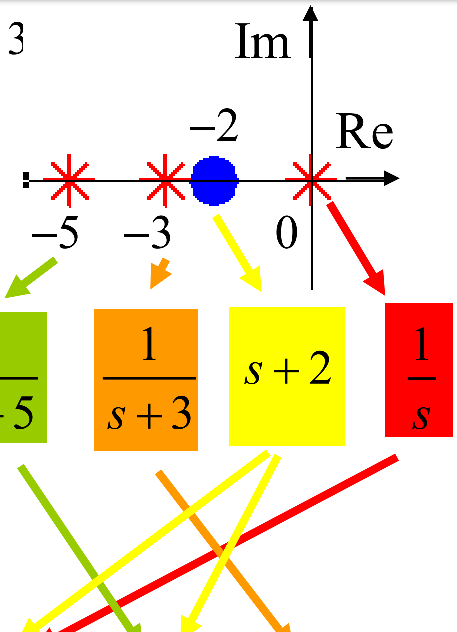



```
t=0:.01:5; nuc=.4*ones(1,length(t));
pri=.6*exp(-5*t);vol=-exp(-3*t);
plot(t,nuc,t,pri,t,vol,t,nuc+pri,...
t,nuc+pri+vol)
```

Příklad -pokračování



$\det(sI-A)=(s+5)(s+3$



- pól vstupního signálu generuje nucenou odezvu
- pól přenosu generuje přirozenou odezvu
- pól charakteristického polynomu generuje volnou odezvu
- reálný pól $-a$ generuje exponenciální odezvu e^{-ta}
- nuly a póly kombinují vliv módů

$$Y(s)=\frac{2/5}{s}+\frac{3/5}{s+5}-\frac{1}{s+3}$$

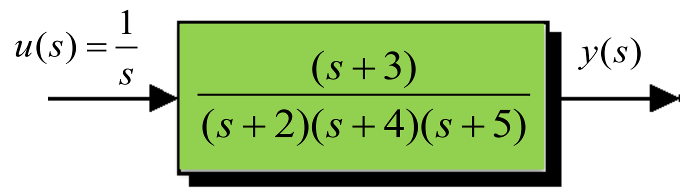
nucená přirozená volný pád

$$y(t)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}e^{-5t}-e^{-3t}$$

Michael Šebek

Příklad: Odhad odezvy z polohy pólů

- Když nás např. zajímá odezva na skok systému



- můžeme ji jednoduše odhadnout tak, že naznačíme rozklad na parciální zlomky

$$y(s)=\boxed{\frac{K_1}{s}}+\boxed{\frac{K_2}{(s+2)}+\frac{K_3}{(s+4)}+\frac{K_4}{(s+5)}}$$

- zřejmě „vstupní pól“ generuje vynucenou skokovou odezvu a póly přenosu generují jednotlivé exponenciální složky přirozené odezvy
- zpětnou L-transformací dostaneme

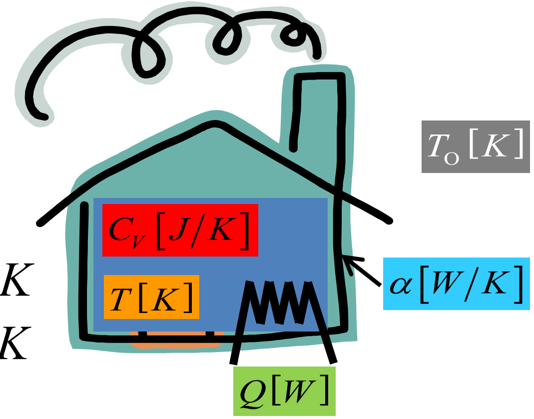
$$y(t)=\boxed{K_1}+\boxed{K_2e^{-2t}+K_3e^{-4t}+K_4e^{-5t}}$$

- přestože výpočet konstant není složitý, konstanty nás často nezajímají
- mnohdy stačí vědět, které složky odezva obsahuje

Ještě k modelům: změna měřítka amplitudy

- Změna měřítka amplitudy (škálování) zjednodušuje analýzu i návrh
- Odhadneme maximální očekávané/povolené hodnoty změn signálů v pracovním režimu
- Vyjdeme z odchylkového modelu (přenosu) vzniklého třeba lineární aproximací $\Delta y = G_\Delta \Delta u + G_{d\Delta} \Delta d$
- a velikost každé veličinu „stlačíme pod 1“ vydělením maximální odhadnutou nebo povolenou odchylkou $u = \dfrac{\Delta u}{\Delta_{\max} u}, d = \dfrac{\Delta d}{\Delta_{\max} d}$
- Δy musíme škálovat společně s $\Delta e, \Delta r$ neboť mají stejné jednotky a jsou vázány $\Delta e = \Delta r - \Delta y$
- Můžeme použít $\Delta_{\max} r$ nebo častěji $\Delta_{\max} e$: $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta_{\max} e}, r = \dfrac{\Delta r}{\Delta_{\max} e}, e = \dfrac{\Delta e}{\Delta_{\max} e}$
  Postup formalizujeme použitím faktorů
  $$D_e = \Delta_{\max} e, D_u = \Delta_{\max} u, D_d = \Delta_{\max} d, D_r = \Delta_{\max} r$$
  a dosazením dostaneme $y = D_e^{-1} G_\Delta D_u u + D_e^{-1} G_{d\Delta} D_d d, e = y - r$
- Někdy k tomu ještě zavedeme škálovanou referenci.
  $$\tilde{r} = \Delta r / \Delta_{\max} r = D_r^{-1} \Delta r \Rightarrow r = D_e^{-1} \Delta r = D_r D_e^{-1} \tilde{r}$$
- Pak je $|d(t)| \le 1, |\tilde{r}(t)| \le 1$ a pomocí $|u(t)| \le 1$ usilujeme o $|e(t)| \le 1$

Příklad: Vytápění pokoje



- energetická rovnováha:
  změna energie v pokoji = přítoku energie
  (zanedbáváme akumulaci ve stěnách)

změna tepla uvnitř	přívod tepla	ztráty do okolí

$$\frac{d}{dt}(C_V T) = Q + \alpha (T_O - T)$$

$$\alpha = 100\ W/K$$
$$C_{V,p} = 100\,kJ/K$$

tepelná kapacita pokoje [J/K]	teplota pokoje [K]	přívod tepla [W]	koeficient přestupu tepla [W/K]	venkovní teplota [K]

- pracovní bod

$$Q_p = 2\,kW, T_p - T_{O,p} = 20\,K$$

- odchylkový model

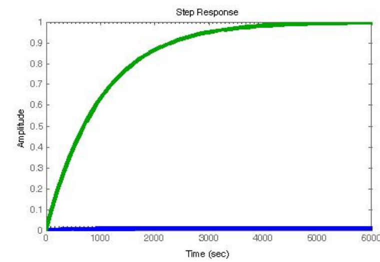
$$\Delta T = T - \hat{T}, \ldots$$

$$\left(C_V \frac{d}{dt} + \alpha\right)\Delta T = \Delta Q + \alpha \Delta T_O$$

- zavedeme $\tau = C_V/\alpha = 10^5/10^2 = 1000\,\mathrm{s}$
  a uděláme LT pro nulovou pp. $\Delta T(0^-) = 0$

$$\Delta T(s) = \frac{1/\alpha}{\tau s + 1}\Delta Q + \frac{1}{\tau s + 1}\Delta T_O$$

$$\Delta T(s) = \frac{0.01}{1000 s + 1}\Delta Q + \frac{1}{1000 s + 1}\Delta T_O$$



Příklad: Vytápění pokoje

- Zavedeme relativní bezrozměrné proměnné

$$y(s)=\frac{\Delta T(s)}{\Delta T_{\max}};u(s)=\frac{\Delta Q(s)}{\Delta Q_{\max}};d(s)=\frac{\Delta T_{\mathrm{O}}(s)}{\Delta T_{\mathrm{O},\max}}$$

kde ze zadání $\Delta T_{\max}=1\,K;\Delta Q_{\max}=2\,kW;\Delta T_{\mathrm{O},\max}=10\,K$

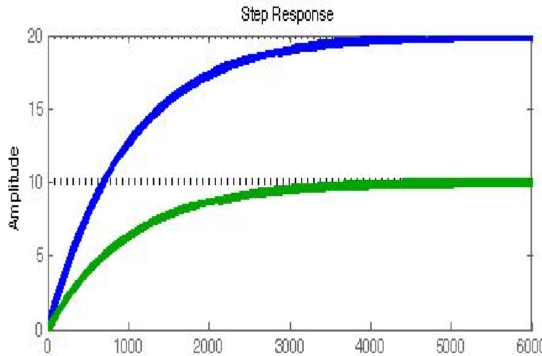
- operacemi

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta T_{\max}}=\frac{1}{\tau s+1}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\Delta T_{\max}}\frac{\Delta Q_{\max}}{\Delta Q_{\max}}\Delta Q+\frac{1}{\tau s+1}\frac{1}{\Delta T_{\max}}\frac{\Delta T_{\mathrm{O},\max}}{\Delta T_{\mathrm{O},\max}}\Delta T_{\mathrm{O}}$$

- dostaneme

$$y(s)=\frac{1}{\tau s+1}\frac{1}{\alpha}\frac{\Delta Q_{\max}}{\Delta T_{\max}}u(s)+\frac{1}{\tau s+1}\frac{\Delta T_{\mathrm{O},\max}}{\Delta T_{\max}}d(s)$$

$$y(s)=\frac{20}{1000s+1}u(s)+\frac{10}{1000s+1}d(s)$$



Ještě k modelům: změna časového měřítka

- Čas většinou měříme v sekundách, ale počítání s velmi rychlými nebo pomalými systémy může být špatně podmíněné a numerický výpočet může být chybný
- Je proto užitečné umět změnit jednotku času. Například mezi časem $t[\mathrm{s}]$ a časem $\tau[\mathrm{ms}]$ platí vztah $\tau = kt$ kde $k = 1000$
- Dopad na derivování je

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d(\tau/k)} = k\frac{dx}{d\tau}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = k^2\frac{d^2x}{d\tau^2}, \ldots$$

- a tak se stavová rovnice transformuje na

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow \dot{x}(\tau) = \frac{1}{k}Ax(\tau) + \frac{1}{k}Bu(\tau)$$

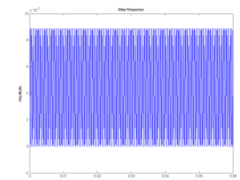
- Z ní v „měřítku času τ“ vychází přenos

$$g(s_\tau) = \left(s_\tau\mathbf{I} - \mathbf{A}_\tau\right)^{-1}\mathbf{B}_\tau = \left(s_\tau\mathbf{I} - \mathbf{A}/k\right)^{-1}\mathbf{B}/k = \left(s_\tau k\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}$$

- Tedy je $s = s_\tau k$ což odpovídá, neboť proměnná *s* v LT má rozměr „1/čas“
- Dále platí pro časové konstanty $T_\tau = kT$

Příklad: změna časového měřítka

- Rychlý oscilátor s přirozenou frekvencí $\omega_n = 15.000\,\mathrm{rad/s}$ (asi 2 kHz) s
$$\ddot{\varphi}(t) + 15.000^2 \varphi(t) = 10^6 u(t)$$
- Změníme-li jednotku času ze sekundy na milisekundu ($\tau = 1000t$)
- Pak $\ddot{\varphi}(t) = 10^6 \dfrac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2}$ a „rovnice v milisekundách“ je
$$\frac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} + 15^2 \varphi(\tau) = u(\tau)$$
- Z první rovnice dostaneme přenos, ze druhé $y(s_\tau) = \dfrac{1}{s_\tau^2 + 15^2} u(s)$
$$y(s) = \frac{10^6}{s^2 + 15.000^2} u(s)$$



- Z porovnání je zřejmé, že $s = 1000 s_\tau$
- Změna ve stavovém modelu (pro $x_1 = \varphi, \dot{x}_2 = \ddot{\varphi}$) je

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15^2 \times 1000^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10^6 \end{bmatrix} u(t) \quad \Rightarrow \quad g(s) = \frac{10^6}{s^2 + 15.000^2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(\tau) \\ \dot{x}_2(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.001 \\ -15^2 \times 1000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10^3 \end{bmatrix} u(\tau) \quad \Rightarrow \quad g(s_\tau) = \frac{1}{s_\tau^2 + 15^2}$$

Spojité modely v Matlabu – objekty a funkce

Control Systems Toolbox

- **`(lti) ss, tf, zpk`**
- **`step, impulse, initial,`** …

Polynomial Tbx:

- **`sdf, (ldf, rdf, mdf), abcd, pol`**
- **`num, den`**

Symbolic MathTbx:

- symbolické výpočty
- **`laplace, ilaplace`**