



OPERAČNÍ PROGRAM PRAHA  
ADAPTABILITA



# Příklady k přednášce 1. Úvod



Michael Šebek  
Automatické řízení 2016



- Pohybová rovnice (2. Newtonův zákon pro rotaci)

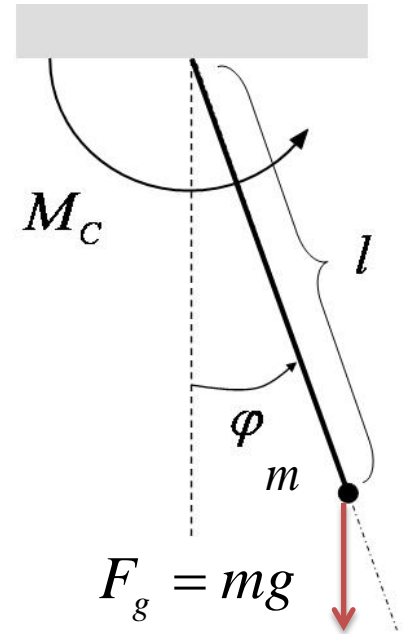
$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} &= \sum M & J &= ml^2 \\ &= M_c - F_g l \sin \varphi \\ &= M_c - mgl \sin \varphi \end{aligned}$$

- Nelineární IO model s  $y = \varphi, u = M_c$

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi &= M_c \\ ml^2\ddot{y} + mgl \sin y &= u \end{aligned}$$

- Nelineární stavový model s  $x_1 = \varphi = y, x_2 = \dot{\varphi} = \dot{y}, u = M_c$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$





# Jen pro zajímavost: Existuje přesné řešení?

- Při hledání řešení (Mathieuovy) rovnice  $ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$
- „první integrál pohybu“ (výpočtem rychlosti z kinetické energie)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$$

- Dále bychom postupovali metodou separace proměnných

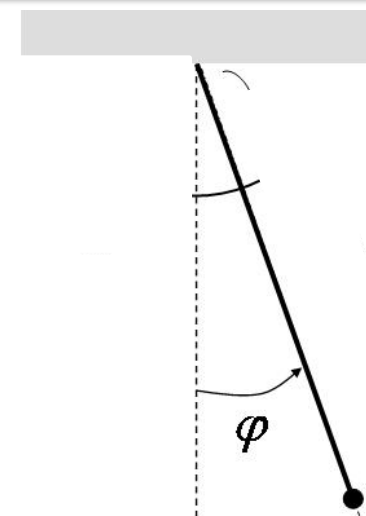
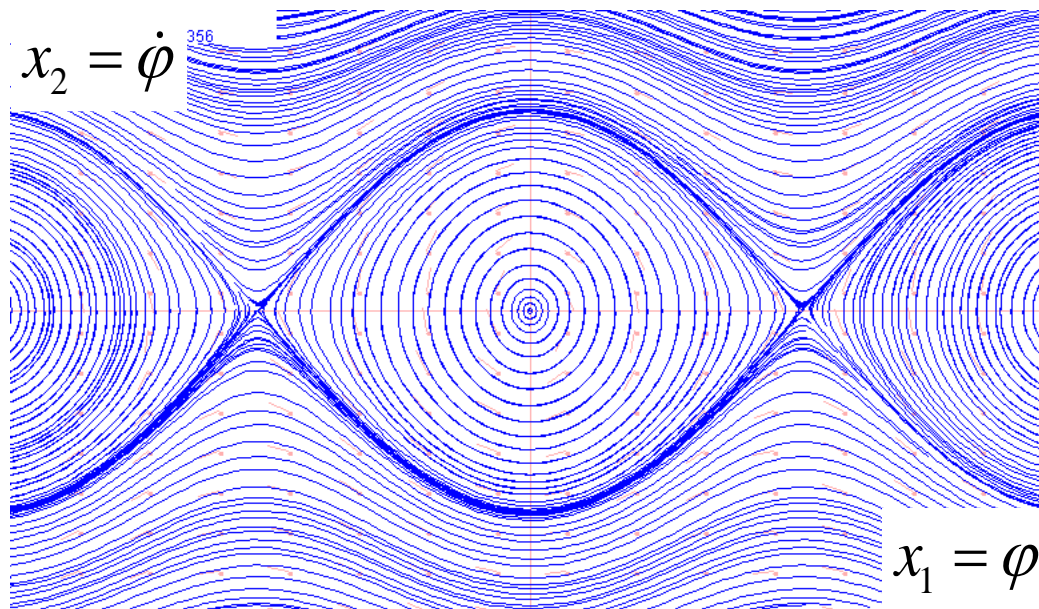
$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} = dt \rightarrow \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} = t + C_1$$

- To ale vede na eliptický integrál, který patří mezi tzv. neelementární (je dokázáno, že ho nelze sestavit z elementárních funkcí)
- Přesné řešení rovnice (v uzavřeném tvaru) tedy **neexistuje!**

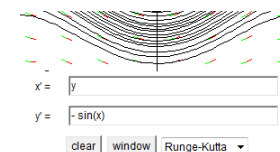


- Řešení nelineárních stavových rovnic ve „fázovém prostoru“ - pro 2. řád je 2D

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1\end{aligned}$$



- Složité křivky, nelze je popsat elementárními funkcemi
- SW: <http://www.bae.ncsu.edu/people/faculty/seaboch/phase/newphase.html>





# Kyvadlo - lineární aproximace v dolní poloze

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- V dolní poloze  $\varphi_p = 0, \dot{\varphi}_p = 0, M_{cp} = 0 \rightarrow \ddot{\varphi}_p = 0$

- IO model

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = M_c$$

$$ml^2 (\ddot{\varphi}_p + \Delta \ddot{\varphi}) + mgl (\sin \varphi_p + \Delta \varphi \cos \varphi_p) = M_{cp} + \Delta M_c$$

$$ml^2 (0 + \Delta \ddot{\varphi}) + mgl (\sin 0 + \Delta \varphi \cos 0) = 0 + \Delta M_c$$

$$ml^2 \Delta \ddot{\varphi} + mgl \Delta \varphi = \Delta M_c$$

$$ml^2 \Delta \ddot{y} + mgl \Delta y = \Delta u$$

- stavový

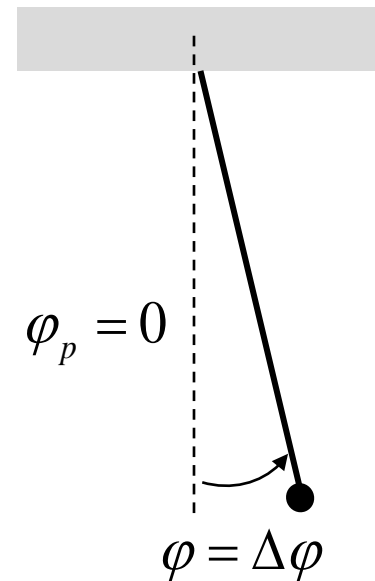
$$x_{1p} = 0, x_{2p} = 0, M_{cp} = 0$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u$$

$$0 + \Delta \dot{x}_1 = 0 + \Delta x_2$$

$$0 + \Delta \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \cos 0 \Delta x_1 + \frac{1}{ml^2} (0 + \Delta u)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \Delta x_1 + \frac{1}{ml^2} \Delta u \end{aligned}$$





# Kyvadlo - lineární aproximace v horní poloze

- v horní poloze  $\varphi_p = \pi, \dot{\varphi}_p = 0, M_{cp} = 0 \rightarrow \ddot{\varphi}_p = 0$

- model IO  $ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = M_c$

$$ml^2 (0 + \Delta \ddot{\varphi}) + mgl (\sin \pi + \Delta \varphi \cos \pi) = 0 + \Delta M_c$$

$$ml^2 \Delta \ddot{\varphi} - mgl \Delta \varphi = 0 + \Delta M_c$$

$$ml^2 \Delta \ddot{\varphi} - mgl \Delta \varphi = \Delta M_c$$

$$ml^2 \Delta \ddot{y} - mgl \Delta y = \Delta u$$

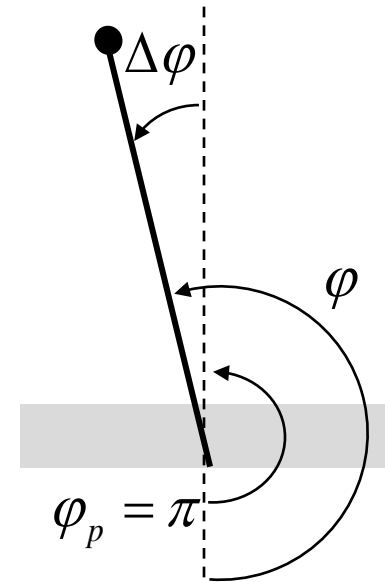
- model stavový

$$x_{1p} = \pi, x_{2p} = 0, M_{cp} = 0$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u$$

$$0 + \Delta \dot{x}_1 = 0 + \Delta x_2$$

$$0 + \Delta \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} (\sin \pi + \cos \pi \Delta x_1) + \frac{1}{ml^2} (0 + \Delta u)$$



$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= \frac{g}{l} \Delta x_1 + \frac{1}{ml^2} \Delta u \end{aligned}$$



# Kyvadlo - aproximace ve vodorovné poloze

- ve vodorovné poloze  $\varphi_p = \pi/2, \dot{\varphi}_p = 0, M_{cp} = mgl \rightarrow \ddot{\varphi}_p = 0$

- model IO

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = M_c$$

$$ml^2 (0 + \Delta \ddot{\varphi}) + mgl \left( \sin \frac{\pi}{2} + \Delta \varphi \cos \frac{\pi}{2} \right) = mgl + \Delta M_c$$

$$ml^2 \Delta \ddot{\varphi} = \Delta M_c$$

$$ml^2 \Delta \ddot{y} = \Delta u$$

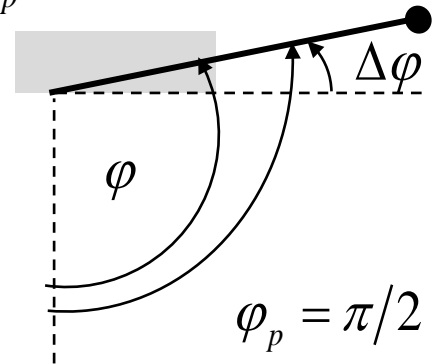
- model stavový

$$x_{1p} = \frac{\pi}{2}, x_{2p} = 0, M_{cp} = mgl$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u$$

$$0 + \Delta \dot{x}_1 = 0 + \Delta x_2$$

$$0 + \Delta \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \left( \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \Delta x_1 \right) + \frac{1}{ml^2} (mgl + \Delta u)$$



$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= \frac{1}{ml^2} \Delta u \end{aligned}$$

pro konstantní  $\Delta u$  „volný pád“



# Kyvadlo - aproximace v obecné poloze

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

$$x_1 = \varphi = y, x_2 = \dot{\varphi} = \dot{y}, u = M_c$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u$$

$$y = x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f} \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, u \right) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u \end{bmatrix}$$

$$y = \mathbf{h} \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, u \right) = h(x_1, x_2, u) = x_1$$

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_{1,p} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p}} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p}} = 0$$

$$\Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2$$

$$\Delta \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \cos x_{1,p} \Delta x_1 + \frac{1}{ml^2} \Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = \Delta x_1$$





# Kyvadlo - aproximace v obecné poloze

$$x_1 = \varphi = y, x_2 = \dot{\varphi} = \dot{y}, u = M_c$$

$$\Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u$$

$$\Delta \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \cos x_{1,p} \Delta x_1 + \frac{1}{ml^2} \Delta u(t)$$

$$y = x_1$$

$$\Delta y(t) = \Delta x_1$$

Nelineární

Lineární

dole

$$x_{1,p} = y_p = \varphi_p = 0 \quad x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0 \quad \rightarrow \quad \cos 0 = 1$$

nahore

$$x_{1,p} = y_p = \varphi_p = \pi \quad x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0 \quad \rightarrow \quad \cos \pi = -1$$

vodorovně

$$x_{1,p} = y_p = \varphi_p = \pi/2 \quad x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0 \quad \rightarrow \quad \cos \pi/2 = 0$$



# Kyvadlo - aproximace IO v obecné poloze

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

$$ml^2 \ddot{y} + mgl \sin y = u$$

$$\mathbf{D}(\ddot{y}(t), \dot{y}(t), y(t)) = \mathbf{N}(u(t))$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}} \right|_p = mgl \cos y_p, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right|_p = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \ddot{\mathbf{y}}} \right|_p = ml^2, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} \right|_p = 1$$

$$ml^2 \Delta \ddot{y} + mgl \cos y_p \Delta y = \Delta u$$

dole

$$x_{1,p} = y_p = \varphi_p = 0 \quad x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0 \quad \rightarrow \quad \cos 0 = 1$$

nahoře

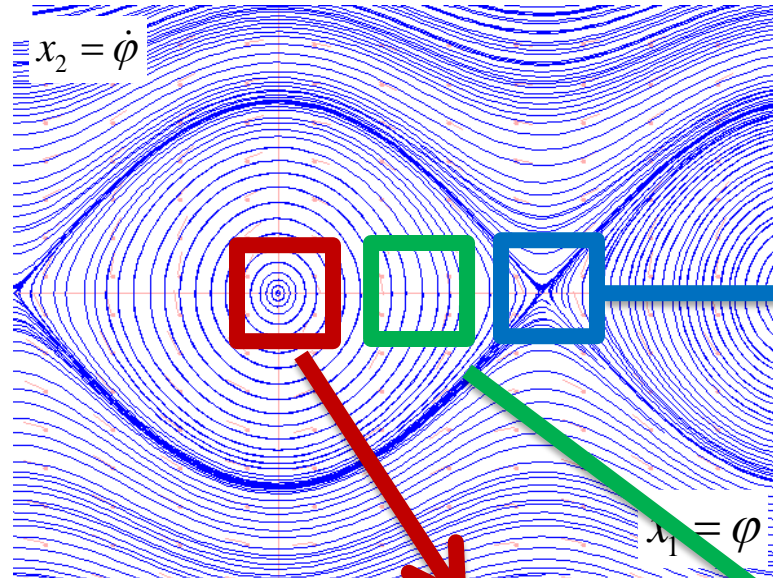
$$x_{1,p} = y_p = \varphi_p = \pi \quad x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0 \quad \rightarrow \quad \cos \pi = -1$$

vodorovně

$$x_{1,p} = y_p = \varphi_p = \pi/2 \quad x_{2,p} = \dot{y}_p = \dot{\varphi}_p = 0 \quad \rightarrow \quad \cos \pi/2 = 0$$

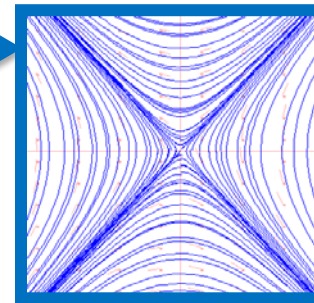


- Linearizace ve fázovém portrétu



$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1\end{aligned}$$

hyperboly



$$x_{1p} = \pi, x_{2p} = 0$$

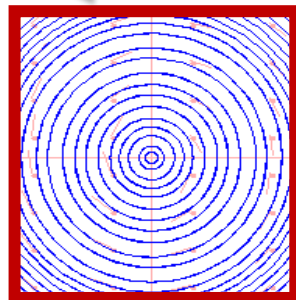
$$\Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2$$

$$\Delta \dot{x}_2 = \Delta x_1$$

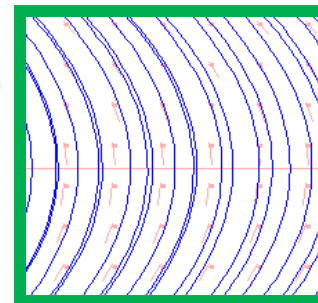
$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

$$\Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2$$

$$\Delta \dot{x}_2 = -\Delta x_1$$



kružnice



paraboly

$$x_{1p} = \frac{\pi}{2}, x_{2p} = 0$$

$$\Delta \dot{x}_1 = \Delta x_2$$

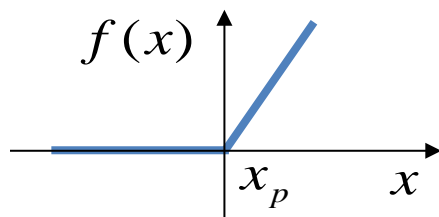
$$\Delta \dot{x}_2 = -1$$

$$(\Delta u = -1)$$

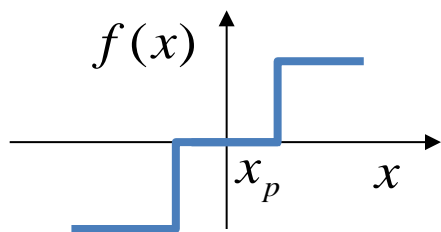
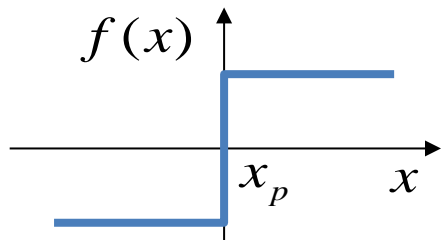


# Někdy lineární aproximace neexistuje

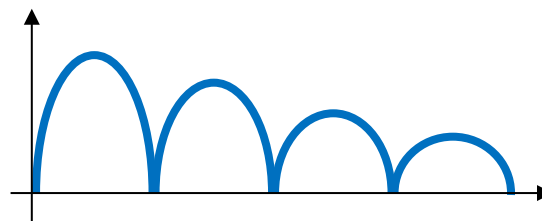
- Nehladká funkce: diody, tlumiče



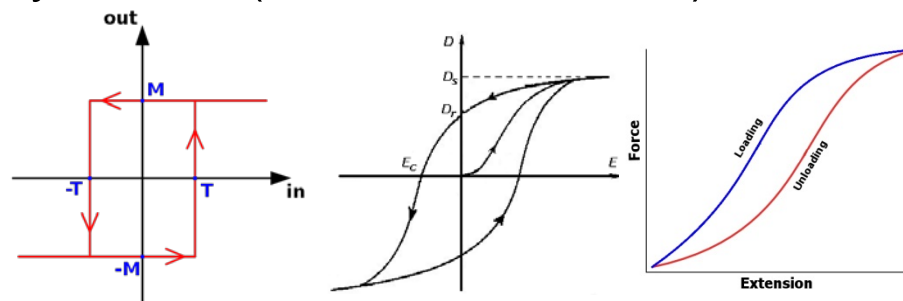
- Nespojité funkce: relé, Coulombovo tření



- Různé funkce, přepínání, (event-driven) skákající míč



- Není to funkce (v matematickém smyslu): hystereze (závislost na dráze)



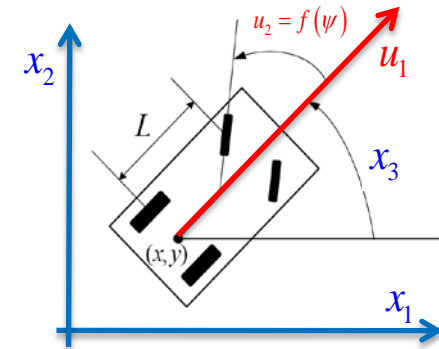
elektrická: ferroelektrický materiál  
elastická: gumička  
termostat, Schmidtův spínač



# Někdy lineární aproximace existuje, ale nepomůže

- Některé nelineární soustavy nepomůže lineárně aproximovat
- Příklad: kinematika auta v rovině

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \cos x_3 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= u_2\end{aligned}$$



- Přibližná linearizace v okolí bodu (0,0,0) je

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ \dot{x}_3 &= u_2\end{aligned} \quad \text{není říditelná} \quad \mathbf{A} = \mathbf{0}_{3 \times 3}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Con} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

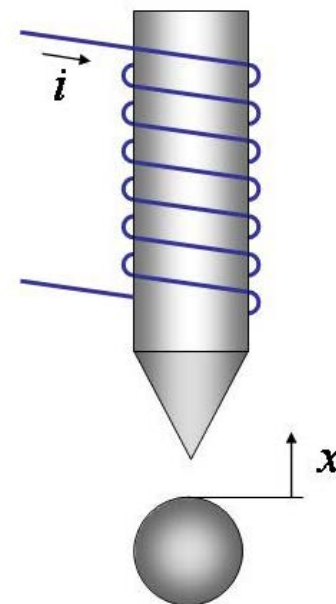
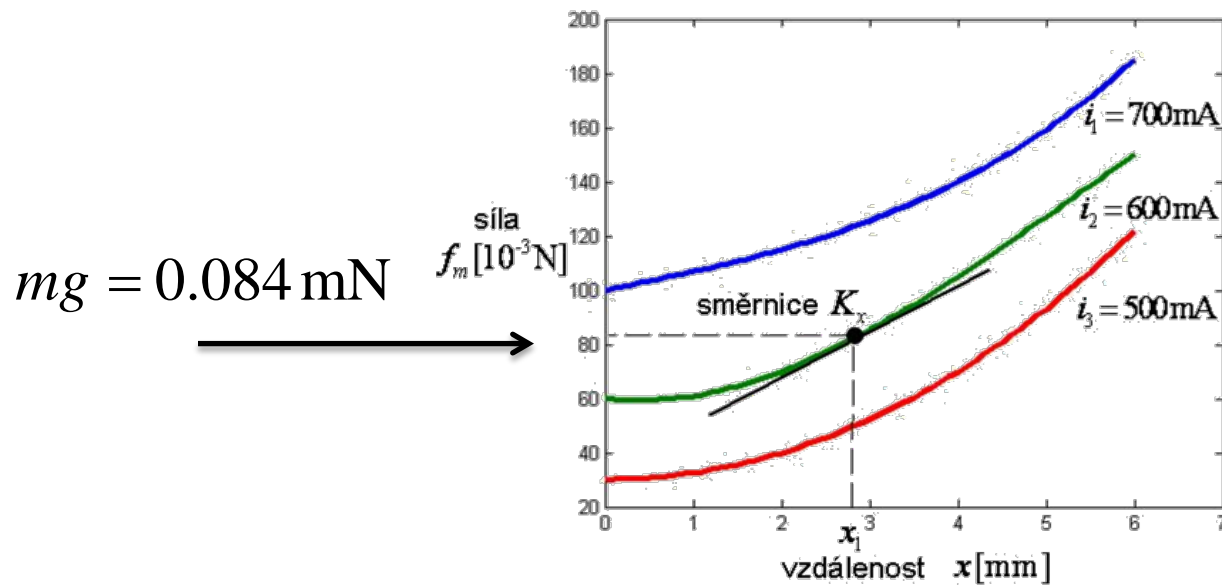
- Intuitivně známý fakt: autem nelze přímo pohnout „do strany“
- Můžeme popojíždět vpřed-vzad s střídavým natáčením kol, ale to už je nelineární řízení
- To plyne z tzv. ne-holonomického omezení  $\dot{x}_1 \sin x_3 - \dot{x}_2 \cos x_3 = 0$  které platí, pokud kola nekloužou do strany



# Aproximace pro nelinearity dané grafem

## Magnetický levitátor s kuličkou (zjednodušené magnetické ložisko)

- rovnice pohybu kuličky  $m\ddot{x} = f_m(x, i) - mg$  kde síla elektromagnetu je teoreticky  $f_m(x, i) \approx 1/x^2$ , ale prakticky složitější
- experimentálně změřené křivky (kulička  $d = 1\text{cm}$ ,  $m = 8,4 \cdot 10^{-3}\text{ kg}$ )



- ekvilibrium = magnetická síla vyruší gravitaci



$$\ddot{x}_p = 0, i_p = 600 \text{ mA}, x_p \approx 3 \text{ mm}, f_m(x_p, i_p) = mg, m = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$m\ddot{x} = f_m(x, i) - mg$$

$$m(0 + \Delta\ddot{x}) = f_m(x_p, i_p) + \left. \frac{\partial f_m}{\partial x} \right|_{x_p, i_p} \Delta x + \left. \frac{\partial f_m}{\partial i} \right|_{x_p, i_p} \Delta i - mg$$

$$m\Delta\ddot{x} = \left. \frac{\partial f_m}{\partial x} \right|_{x_p, i_p} \Delta x + \left. \frac{\partial f_m}{\partial i} \right|_{x_p, i_p} \Delta i$$

určíme z grafu  
jako směrnici

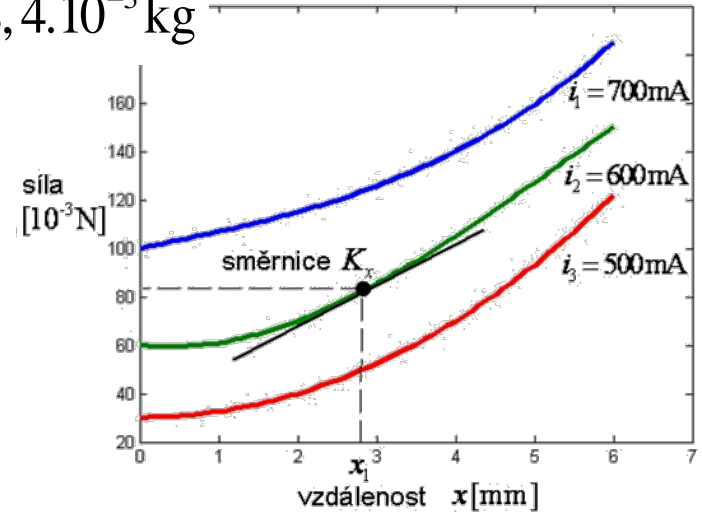
$$\left. \frac{\partial f_m}{\partial x} \right|_{x_p, i_p} \cong 14 \text{ N/m}$$

odhadneme z grafu

$$\left. \frac{\partial f_m}{\partial i} \right|_{x_p, i_p} \cong \frac{f(x_p, i_1) - f(x_p, i_3)}{i_1 - i_3} = \frac{122 \times 10^{-3} - 42 \times 10^{-3}}{(700 - 500) \times 10^{-3}} = 0.4 \text{ N/A}$$

Lineární aproximace je

$$\Delta\ddot{x} = 1667\Delta x + 47,6\Delta i$$



kde signály jsou v jednotkách SI  $\Delta x[\text{m}], \Delta i[\text{A}]$

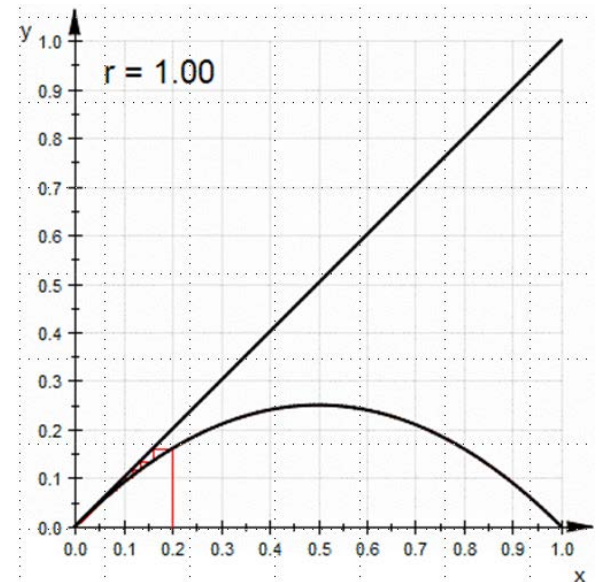
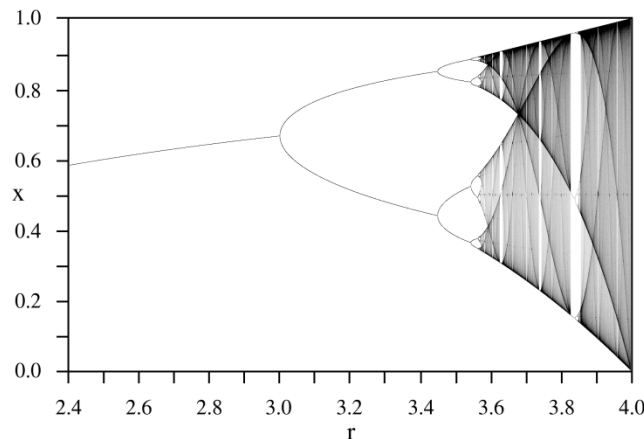


- Logistické zobrazení

$$x(k+1) = rx(k)(1-x(k))$$

- Demografický model - vystihuje 2 jevy: pro malé populace optimismus (míra růstu roste úměrně s velikostí populace), pro velké populace vyhladovění (míra růstu klesá úměrně rozdílu „úživnost prostředí“ minus velikost populace)
- Chování silně závisí na parametru  $r$   
řešení pavučinovým diagramem

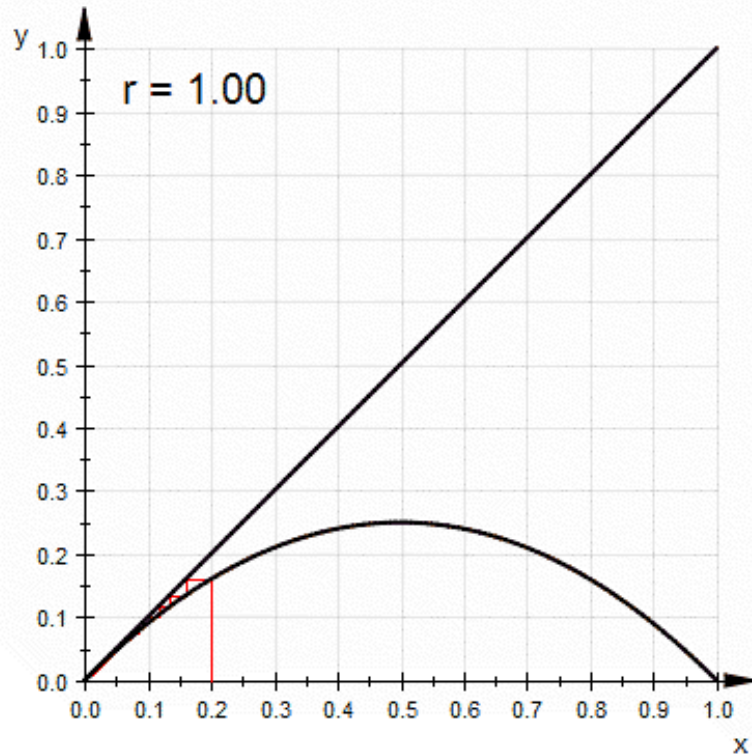
- bifurkace



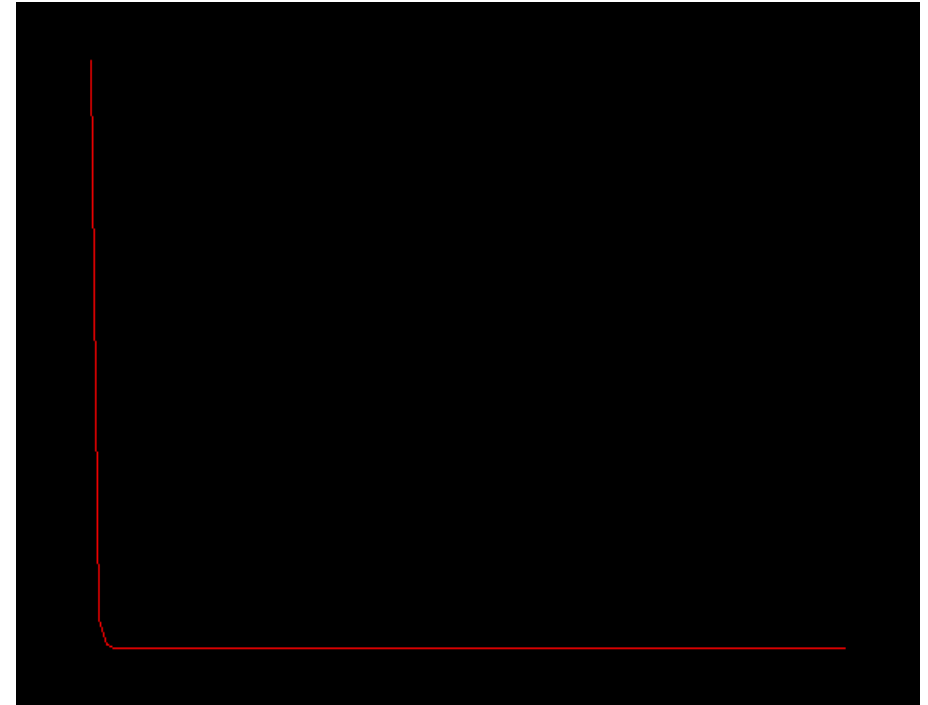




# Nelineární diskrétní systém



Pavučinový diagram:  
Opakovaná řešení pro různá  $r$   
(ekvilibria, oscilace s různou  
periodou, chaos)



Simulace: Opakovaná řešení (vždy  
100 kroků) pro různá  $r$  (od  $r = 0$   
(červená) do  $r = 4$  (purpurová))



- Různé nelineární modely v Simulinku  
<http://www.hedengren.net/research/models.htm>
- Aplet kreslící fázové portréty  
<http://www.bae.ncsu.edu/people/faculty/seaboch/phase/newphase.html>
- Kyvadlo na Wikipedii  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum\\_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics))
- Hezká a čtivá (odborná) kniha o nelineárních systémech a chaosu - [na Amazonu](#)
- Složitější „matematické“ knihy, ale ty jsou spíš až pro magisterský kurz NES, nebo doktorské kurzy

