

## 2 - Spojité modely



Michael Šebek  
Automatické řízení 2016



# Lineární stavový model - SISO

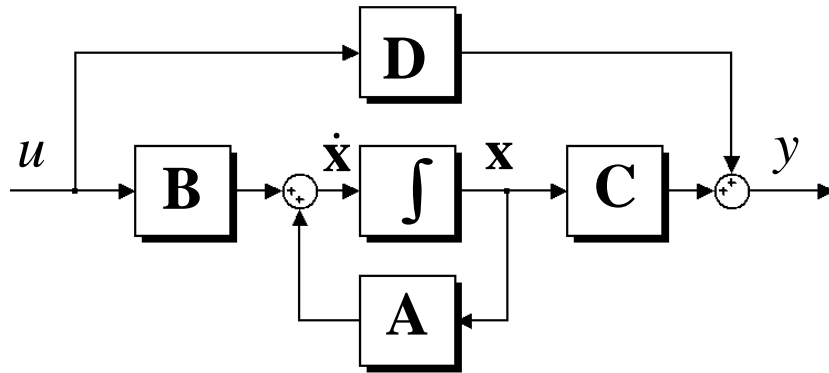
- Stavová a výstupní rovnice a počáteční stav

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{x}_0$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)$$

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$
$\mathbf{C}$	$\mathbf{D}$

- Blokově



- Rozměry v případě SISO

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [d]u$$



- Řešení v časové oblasti

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau) \mathbf{B}u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

odezva na počáteční stav

odezva na vstupní signál

- platí pro  $\mathbf{D} = 0$
- podobně na výstupu

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t-\tau) \mathbf{B}u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Stavová matice přechodu

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

- z řešení pomocí LT plyne

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0)$$

- porovnáním

$$\mathcal{L}\{\mathbf{\Phi}(t)\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

- prvky jsou součty exponenciál generovaných vlastními čísly  $\mathbf{A}$
- příslušné konstanty vypočteme z  $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}, \dot{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{A}$

- nebo zpětnou LT 
$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}_-^{-1} \left\{ \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \right\}$$

- můžeme ji také vypočítat z řady

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \dots + \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} + \dots$$

podobně jako 
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$



# Řešení pomocí LT a převod na model IO

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} & \mathbf{x}(0^-) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

- použitím Laplaceovy transformace  $\mathcal{L}_- (\dot{\mathbf{x}}) = s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0^-) = s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{u}(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0$$

- dostaneme model vnější ve tvaru (pro SISO)

odezva na vstup + odezva na počáteční stav

$$y(s) = \frac{b(s)}{a(s)}u(s) + \frac{c_{x_0}(s)}{a(s)}$$

- charakteristický polynom systému  $a(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$
- časový průběh dostaneme zpětnou transformací

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}_-^{-1}\{\mathbf{x}(s)\}, \mathbf{y}(t) = \mathcal{L}_-^{-1}\{\mathbf{y}(s)\}$$



- Podíl (při nulových pp.)

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

- Pokud nebylo nic vykráceno, je

$$a(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

$$b(s) = \mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + a(s) \mathbf{D}$$

Pozor.: při nenulových pp. je

$$y(s) = \boxed{\frac{b(s)}{a(s)}} u(s) + \frac{c_{x_0}(s)}{a(s)}$$

$$\deg a(s) = \dim(\mathbf{A}) = n$$

$$\deg b(s) = m$$

$$m < n \Leftrightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0}, m = n \Leftrightarrow \mathbf{D} \neq \mathbf{0}$$

- Racionální funkce - striktně ryzí nebo ryzí (neryzí případ není fyzikálně realizovatelný)  $n - m$  je **relativní řád**

- Kořeny jmenovatele = **póly přenosu**  $a(s) = a_n (s - p_1) \dots (s - p_n)$   
 kořeny čitatele = **nuly přenosu**  $b(s) = b_m (s - z_1) \dots (s - z_m)$

- **Časové konstanty**

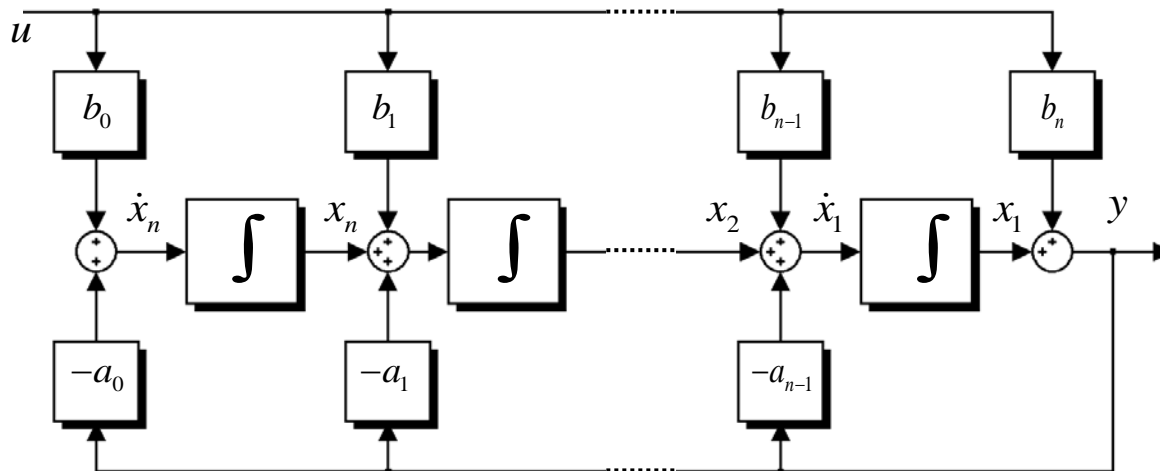
$$T_i = -1/p_i, \tau_i = -1/z_i,$$

- Impulsní odezva  $f(t) = \mathcal{L}_-^{-1} \{b(s)/a(s)\}$



$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

- počáteční podmínky  $y^{(n-1)}(0^-), \dots, \dot{y}(0^-), y(0^-)$
- Blokově pro  $a_n = 1$



Ověření: opakovaně zprava dosazovat a derivovat

$$y = b_n u + x_1 \Rightarrow \dot{y} = b_n \dot{u} + \dot{x}_1 = b_n \dot{u} + b_{n-1} u + x_2 - a_{n-1} y \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = \dots$$



- Laplaceovou transformací  $\mathcal{L}_- \{y^{(k)}\} = s^k y(s) - s^{k-1} y(0^-) - \dots - y^{(k-1)}(0^-)$

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) y(s) = (b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0) u(s) + c(s)$$

$$y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} u(s) + \frac{c(s)}{a(s)}$$

$$a(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

$$b(s) = b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0$$

$$c(s) = (a_n y(0^-) - b_n u(0^-)) s^{n-1} + (a_n \dot{y}(0^-) + a_{n-1} y(0^-) - b_n \dot{u}(0^-) - b_{n-1} u(0^-)) s^{n-2} \\ + \dots + (a_n y^{(n-1)}(0^-) + \dots + a_1 y(0^-) - b_n u^{(n-1)}(0^-) - \dots - b_1 u(0^-))$$



# Stavová realizace: stavový model z IO

- Přímá metoda (pro  $a_n = 1$ )  $y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_n u^{(n)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$
- Označíme  $y = \bar{y} + b_n u$  a tím převedeme striktně ryzí případ

$$\sum_{i=0}^n a_i \bar{y}^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{b}_i u^{(i)}, \quad \bar{b}_i = b_i - b_n a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

- v přenosu tomu odpovídá  $g(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_0}{s^n + \dots + a_0} = b_n + \frac{\bar{b}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \bar{b}_0}{s^n + \dots + a_0}$

- Zavedeme pomocnou proměnnou  $v$  def. vztahem :  $\sum_{i=0}^n a_i v^{(i)} = u$   
a stavy volíme jako její derivace

$x_1 = v$  pak

$$\begin{aligned} x_2 &= \dot{v} & \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots & \vdots & \\ &\vdots & \vdots & \\ x_n &= v^{(n-1)} & \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ & & \dot{x}_n &= u - a_0 x_1 - a_1 x_2 \\ & & & \dots - a_{n-1} x_n \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$





# Stavová realizace

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

$$\sum_{i=0}^n a_i \bar{y}^{(i)} = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{b}_j \left( \sum_{i=0}^n a_i v^{(i)} \right)^{(j)}$$

$$\mathbf{C} = [\bar{b}_0 \quad \bar{b}_1 \quad \dots \quad \bar{b}_{n-1}]$$

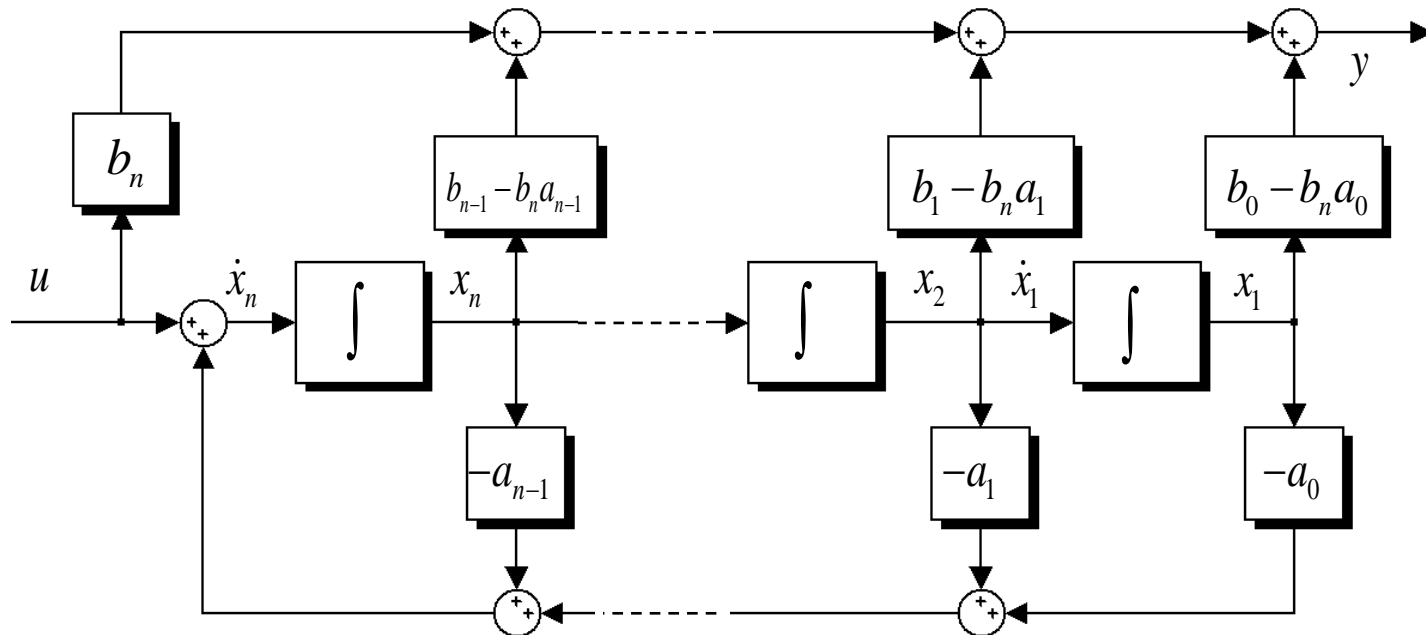
$$\sum_{i=0}^n a_i \bar{y}^{(i)} = \sum_{i=0}^n a_i \left( \sum_{j=0}^{n-1} \bar{b}_j v^{(j)} \right)^{(i)}$$

$$\mathbf{D} = [b_n]$$

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^n \bar{b}_j v^{(j)} = \sum_{i=0}^n \bar{b}_j x_{j+1}$$



$$y = \bar{y} + b_n u = b_n u + \bar{b}_0 x_1 + \dots + \bar{b}_{n-1} x_n$$





- Shrnutí: **Kanonický tvar říditelnosti** (také Frobeniův, normální, ...)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [\bar{b}_0 \quad \bar{b}_1 \quad \dots \quad \bar{b}_{n-1}], \quad \mathbf{D} = [b_n]$$

- Označíme-li stavy obráceně ( $x_1 \leftrightarrow x_n, x_2 \leftrightarrow x_{n-1}$ ), dostaneme jinou variantu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [\bar{b}_{n-1} \quad \dots \quad \bar{b}_1 \quad \bar{b}_0], \quad \mathbf{D} = [b_n]$$



# Stavová realizace vzhledem k výstupu

- Stavů definujeme jako lineární kombinace derivací vstupu a výstupu

formálně

$$x_1 = y - b_n u$$

$$x_2 = a_{n-1} y + \dot{y} - b_{n-1} u - b_n \dot{u}$$

⋮

$$x_n = a_1 y + a_2 \dot{y} + \dots + y^{(n-1)} - b_1 u - b_2 \dot{u} \dots - b_n u^{(n-1)}$$

$$x_{n+1} = a_0 y + a_1 \dot{y} + \dots + y^{(n)} - b_0 u - b_1 \dot{u} \dots - b_n u^{(n)} = 0$$

- Z první vypočteme výstup  $y = x_1 + b_n u$  a dosadíme do ostatních

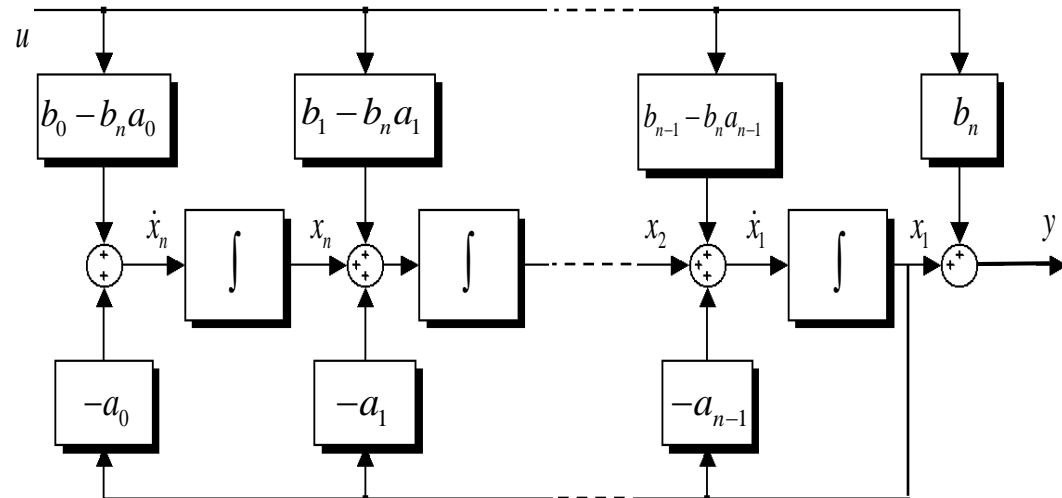
$$x_2 = a_{n-1} x_1 + \dot{x}_1 - (b_{n-1} - a_{n-1} b_n) u$$

$$x_3 = a_{n-2} x_1 + \dot{x}_2 - (b_{n-2} - a_{n-2} b_n) u$$

⋮

$$x_n = a_1 x_1 + \dot{x}_{n-1} - (b_1 - a_1 b_n) u$$

$$x_{n+1} = a_0 x_1 + \dot{x}_n - (b_0 - a_0 b_n) u = 0$$





# Stavová realizace vzhledem k výstupu

- Z předchozího plyne  
Kanonický tvar  
pozorovatelnosti

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_1 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{n-1} - a_{n-1}b_n \\ b_{n-2} - a_{n-2}b_n \\ \vdots \\ b_1 - a_1b_n \\ b_0 - a_0b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad \mathbf{D} = [b_n]$$

- Záměnou pořadí  
stavů dostaneme  
variantu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & & 0 & 0 & -a_1 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 - a_0b_n \\ b_1 - a_1b_n \\ \vdots \\ b_{n-2} - a_{n-2}b_n \\ b_{n-1} - a_{n-1}b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [0 \ \dots \ 0 \ 1], \quad \mathbf{D} = [b_n]$$



# Transformace souřadnic stavového prostoru

- Převédme stavový model do nových souřadnic daných  $\mathbf{x}_{old} = \mathbf{T}\mathbf{x}_{new}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{old} &= \mathbf{A}_{old}\mathbf{x}_{old} + \mathbf{B}_{old}u \\ y &= \mathbf{C}_{old}\mathbf{x}_{old} + Du \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{old} &= \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}_{new} = \mathbf{A}_{old}\mathbf{T}\mathbf{x}_{new} + \mathbf{B}_{old}u \\ y &= \mathbf{C}_{old}\mathbf{T}\mathbf{x}_{new} + Du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{new} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{old}\mathbf{T}\mathbf{x}_{new} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_{old}u \\ y &= \mathbf{C}_{old}\mathbf{T}\mathbf{x}_{new} + Du \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{new} &= \mathbf{A}_{new}\mathbf{x}_{new} + \mathbf{B}_{new}u \\ y &= \mathbf{C}_{new}\mathbf{x}_{new} + Du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{new} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{old}\mathbf{T} \\ \mathbf{B}_{new} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_{old} \\ \mathbf{C}_{new} &= \mathbf{C}_{old}\mathbf{T} \end{aligned}$$

- transformace má smysl pro  $\mathbf{T}$  regulární
- přenos se nemění

$$\begin{aligned} f(s) &= \mathbf{C}_{new} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{new})^{-1} \mathbf{B}_{new} \\ &= \mathbf{C}_{old} \mathbf{T} (s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{old}\mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_{old} \\ &= \mathbf{C}_{old} \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{old})^{-1} \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_{old} \\ &= \mathbf{C}_{old} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{old})^{-1} \mathbf{B}_{old} \end{aligned}$$

- **Pozor:** někdy jsou nové souřadnice dány „opačně“ vztahem  $\mathbf{x}_{new} = \mathbf{V}\mathbf{x}_{old}$   
Pak je zřejmé  $\mathbf{x}_{old} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_{new}$ , tedy ve vztazích zaměníme  $\mathbf{T} = \mathbf{V}^{-1}$



Volný pád neboli **odezva nebuzeného systému na nenulový počáteční stav**

$$x(s) = \frac{\text{adj}(sI - \mathbf{A})\mathbf{x}(0^-)}{\det(sI - \mathbf{A})} \quad (\text{striktně ryzí}) \quad y(s) = \frac{\mathbf{C}\text{adj}(sI - \mathbf{A})\mathbf{x}(0^-)}{\det(sI - \mathbf{A})}$$

Čitatel závisí na konkrétních počátečních podmínkách a moc nás teď nezajímá  
Jmenovatel (charakteristický polynom)  $\det(sI - A)$  rozložíme na kořenové činitele

$$\prod (s - a_i) \prod (s - b_j)^{m_j} \prod ((s + \sigma_k)^2 + \omega_k^2) \prod ((s + \sigma_l)^2 + \omega_l^2)^{n_l}$$

pak L. obraz odezvy obsahuje zlomky (čitatele nejsou důležité)

$$\frac{\bullet}{(s - a_i)} \frac{\bullet}{(s - b_j)}, \dots, \frac{\bullet}{(s - b_j)^{m_j}} \frac{\bullet}{(s + \sigma_k)^2 + \omega_k^2} \frac{\bullet}{(s + \sigma_l)^2 + \omega_l^2}, \dots, \frac{\bullet}{((s + \sigma_l)^2 + \omega_l^2)^{n_l}}$$

a odezva v časové oblasti obsahuje složky

← těmto složkám  
← říkáme **módy**

$$e^{a_i t} e^{b_j t}, t e^{b_j t}, \dots, t^{m_j-1} e^{b_j t} / (m_j - 1)! e^{-\sigma t} \sin \omega_k t, e^{-\sigma t} \cos \omega_k t \dots, t e^{-\sigma t} \cos \omega_l t, t e^{-\sigma t} \sin \omega_l t, \dots$$