OPERAČNÍ PROGRAM PRAHA
ADAPTABILITA

PRAHA PRAGUE PRAGA PRAG

EVROPSKÁ UNIE

2 - Spojité modely

Michael Šebek

Automatické řízení 2018

Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

21-2-18

Lineární stavový model - SISO

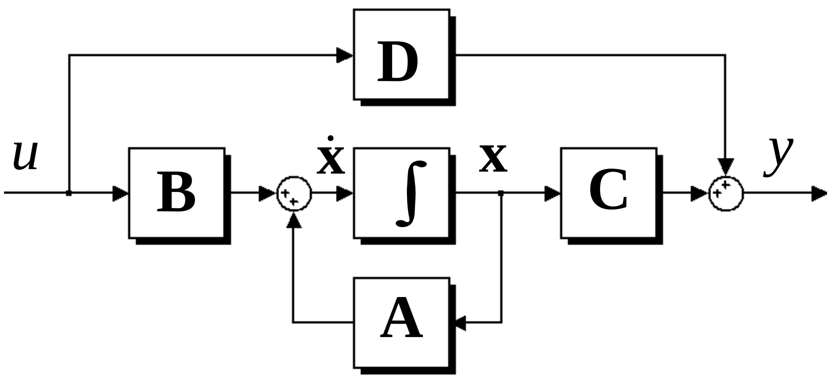
- Stavová a výstupní rovnice a počáteční stav

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \qquad \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{x}_0$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)$$

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}$$

- Blokově



- Rozměry v případě SISO

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \end{bmatrix} u$$

Řešení stavové rovnice

- Řešení v časové oblasti

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$
$$= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

odezva na počáteční stav | odezva na vstupní signál

- platí pro $\boldsymbol{D} = 0$
- podobně na výstupu

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$
$$= \mathbf{C\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

Stavová matice přechodu

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

- z řešení pomocí LT plyne

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

- porovnáním

$$\mathcal{L}\{\mathbf{\Phi}(t)\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

- prvky jsou součty exponenciál generovaných vlastními čísly A
- příslušné konstanty vypočteme z $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}, \dot{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{A}$
- nebo zpětnou LT $\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}_{-}^{-1}\left\{\dfrac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\right\}$
- můžeme ji také vypočítat z řady

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \cdots + \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} + \cdots$$

podobně jako $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

Řešení pomocí LT a převod na model IO

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

- použitím Laplaceovy transformace $\mathcal{L}_-(\dot{\mathbf{x}}) = s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0^-) = s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{u}(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0$$

- dostaneme model vnější ve tvaru (pro SISO)

odezva na vstup + odezva na počáteční stav

$$y(s) = \frac{b(s)}{a(s)}u(s) + \frac{c_{x_0}(s)}{a(s)}$$

- charakteristický polynom systému $a(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$
- časový průběh dostaneme zpětnou transformací

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}_-^{-1}\{\mathbf{x}(s)\}, \mathbf{y}(t) = \mathcal{L}_-^{-1}\{\mathbf{y}(s)\}$$

Přenos

- Podíl (při nulových pp.)

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Pozor.: při nenulových pp. je

$$y(s) = \boxed{\frac{b(s)}{a(s)}} u(s) + \frac{c_{x_0}(s)}{a(s)}$$

- Pokud nebylo nic vykráceno, je

$$a(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$
$$b(s) = \mathbf{C}\,\mathrm{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + a(s)\mathbf{D}$$

$$\deg a(s) = \dim(\mathbf{A}) = n$$
$$\deg b(s) = m$$
$$m < n \Leftrightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0}, m = n \Leftrightarrow \mathbf{D} \neq \mathbf{0}$$

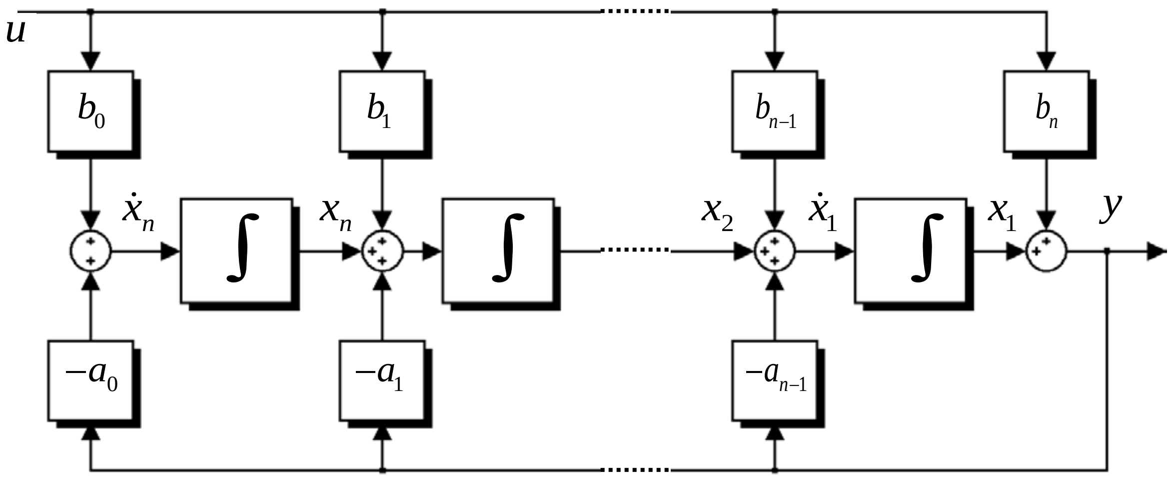
- Racionální funkce - striktně ryzí nebo ryzí (neryzí případ není fyzikálně realizovatelný) $n - m$ je relativní řád
- Kořeny jmenovatele = póly přenosu $a(s) = a_n(s - p_1)\ldots(s - p_n)$

  kořeny čitatele = nuly přenosu $b(s) = b_m(s - z_1)\ldots(s - z_m)$
- Časové konstanty $T_i = -1/p_i, \tau_i = -1/z_i,$
- Impulsní odezva $f(t) = \mathcal{L}_-^{-1}\{b(s)/a(s)\}$

Lineární IO model - SISO

$$a_n y^{(n)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}+a_0 y(t)=b_n u^{(n)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0 u(t)$$

- počáteční podmínky $y^{(n-1)}(0^-),\ldots,\dot{y}(0^-),y(0^-)$
- Blokově pro $a_n=1$



Ověření: opakovaně zprava dosazovat a derivovat

$$y=b_n u+x_1 \Rightarrow \dot{y}=b_n\dot{u}+\dot{x}_1=b_n\dot{u}+b_{n-1}u+x_2-a_{n-1}y\Rightarrow\cdots\Rightarrow y^{(n)}=\ldots$$

Řešení pomocí LT

- Laplaceovou transformací $\mathcal{L}_{-}\left\{y^{(k)}\right\} = s^k y(s) - s^{k-1} y(0^-) - \cdots - y^{(k-1)}(0^-)$

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$\left(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0\right) y(s) = \left(b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0\right) u(s) + c(s)$$

$$\boxed{y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} u(s) + \frac{c(s)}{a(s)}}$$

$$a(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0$$

$$b(s) = b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0$$

$$c(s) = \left(a_n y(0^-) - b_n u(0^-)\right) s^{n-1} + \left(a_n \dot{y}(0^-) + a_{n-1} y(0^-) - b_n \dot{u}(0^-) - b_{n-1} u(0^-)\right) s^{n-2}$$

$$+ \cdots + \left(a_n y^{(n-1)}(0^-) + \cdots + a_1 y(0^-) - b_n u^{(n-1)}(0^-) - \cdots - b_1 u(0^-)\right)$$

Stavová realizace: stavový model z IO

- Přímá metoda (pro $a_n = 1$) $y^{(n)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_n u^{(n)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u$
- Označíme $y = \bar{y} + b_n u$ a tím převedeme striktně ryzí případ

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \bar{y}^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{b}_i u^{(i)}, \qquad \bar{b}_i = b_i - b_n a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

- v přenosu tomu odpovídá $g(s) = \dfrac{b_n s^n + \cdots + b_0}{s^n + \cdots + a_0} = b_n + \dfrac{\bar{b}_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \bar{b}_0}{s^n + \cdots + a_0}$
- Zavedeme pomocnou proměnnou v def. vztahem : $\sum_{i=0}^{n} a_i v^{(i)} = u$
  a stavy volíme jako její derivace

$$x_1 = v, \quad x_2 = \dot{v}, \quad \vdots \quad x_n = v^{(n-1)}$$

pak

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= u - a_0 x_1 - a_1 x_2 \\ &\quad - \cdots - a_{n-1} x_n \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stavová realizace

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \bar{y}^{(i)} = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{b}_j \left(\sum_{i=0}^{n} a_i v^{(i)} \right)^{(j)}$$

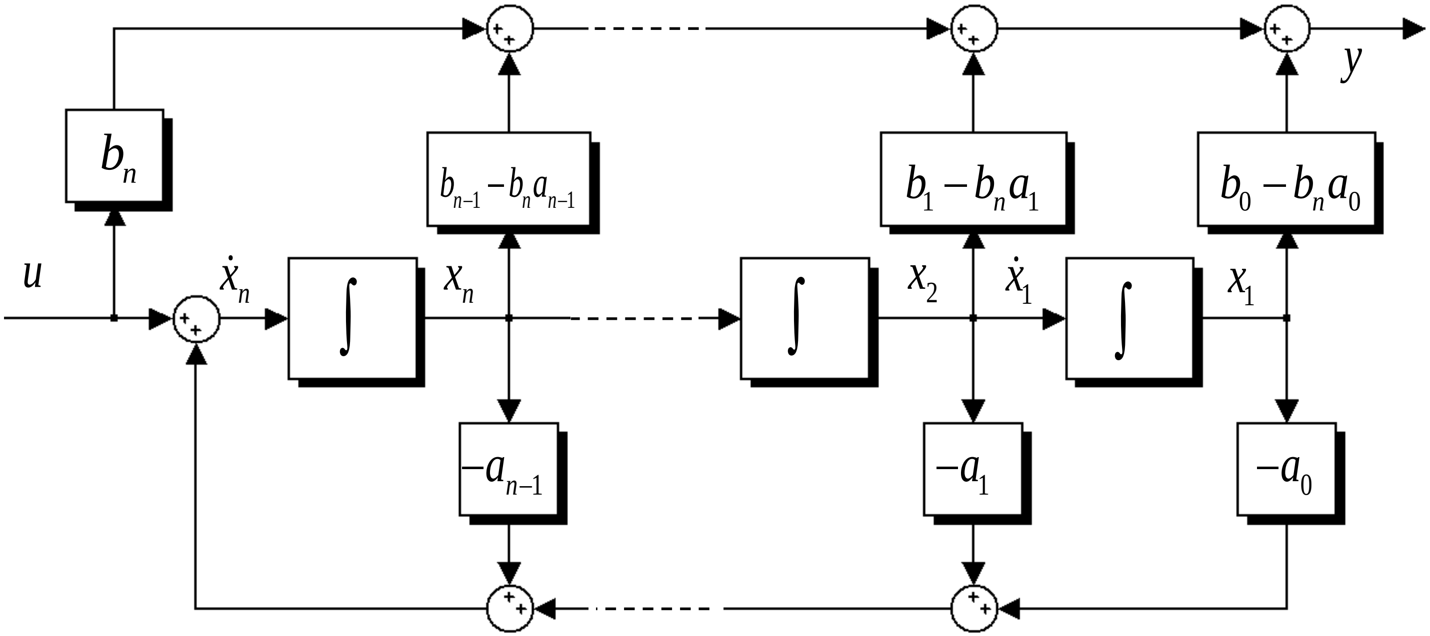
$$\sum_{i=0}^{n} a_i \bar{y}^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=0}^{n-1} \bar{b}_j v^{(j)} \right)^{(i)}$$

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^{n} \bar{b}_j v^{(j)} = \sum_{i=0}^{n} \bar{b}_j x_{j+1}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{b}_0 & \bar{b}_1 & \dots & \bar{b}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix}$$

$$y = \bar{y} + b_n u = b_n u + \bar{b}_0 x_1 + \cdots + \bar{b}_{n-1} x_n$$



Stavová realizace

- Shrnuto: Kanonický tvar řiditelnosti (také Frobeniův, normální, …)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{b}_0 & \bar{b}_1 & \ldots & \bar{b}_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix}$$

- Označíme-li stavy obráceně ($x_1 \leftrightarrow x_n, x_2 \leftrightarrow x_{n-1}$), dostaneme jinou variantu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{n-1} & \ldots & \bar{b}_1 & \bar{b}_0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix}$$

Stavová realizace vzhledem k výstupu

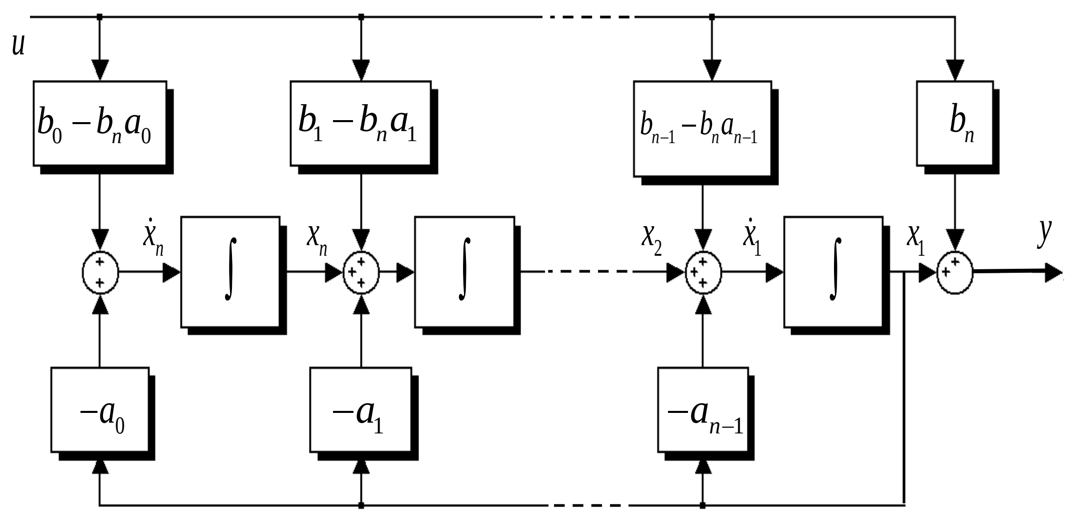
- Stavy definujeme jako lineární kombinace derivací vstupu a výstupu

$$x_1 = y - b_n u$$
$$x_2 = a_{n-1} y + \dot{y} - b_{n-1} u - b_n \dot{u}$$
$$\vdots$$
$$x_n = a_1 y + a_2 \dot{y} + \cdots + y^{(n-1)} - b_1 u - b_2 \dot{u} \cdots - b_n u^{(n-1)}$$

formálně
$$x_{n+1} = a_0 y + a_1 \dot{y} + \cdots + y^{(n)} - b_0 u - b_1 \dot{u} \cdots - b_n u^{(n)} = 0$$

- Z první vypočteme výstup $y = x_1 + b_n u$ a dosadíme do ostatních

$$x_2 = a_{n-1} x_1 + \dot{x}_1 - \left(b_{n-1} - a_{n-1} b_n\right) u$$
$$x_3 = a_{n-2} x_1 + \dot{x}_2 - \left(b_{n-2} - a_{n-2} b_n\right) u$$
$$\vdots$$
$$x_n = a_1 x_1 + \dot{x}_{n-1} - \left(b_1 - a_1 b_n\right) u$$
$$x_{n+1} = a_0 x_1 + \dot{x}_n - \left(b_0 - a_0 b_n\right) u = 0$$



Stavová realizace vzhledem k výstupu

- Z předchozího plyne Kanonický tvar pozorovatelnosti

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{n-1}-a_{n-1}b_n \\ b_{n-2}-a_{n-2}b_n \\ \vdots \\ b_1-a_1b_n \\ b_0-a_0b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix}$$

- Záměnou pořadí stavů dostaneme variantu

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & & 0 & 0 & -a_1 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_0-a_0b_n \\ b_1-a_1b_n \\ \vdots \\ b_{n-2}-a_{n-2}b_n \\ b_{n-1}-a_{n-1}b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix}$$

Transformace souřadnic stavového prostoru

- Převeďme stavový model do nových souřadnic daných $\mathbf{x}_{\text{old}} = \mathbf{T}\mathbf{x}_{\text{new}}$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{\text{old}} &= \mathbf{A}_{\text{old}}\mathbf{x}_{\text{old}} + \mathbf{B}_{\text{old}}u \\ y &= \mathbf{C}_{\text{old}}\mathbf{x}_{\text{old}} + Du\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{\text{old}} &= \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}_{\text{new}} = \mathbf{A}_{\text{old}}\mathbf{T}\mathbf{x}_{\text{new}} + \mathbf{B}_{\text{old}}u \\ y &= \mathbf{C}_{\text{old}}\mathbf{T}\mathbf{x}_{\text{new}} + Du\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{\text{new}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{old}}\mathbf{T}\mathbf{x}_{\text{new}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_{\text{old}}u \\ y &= \mathbf{C}_{\text{old}}\mathbf{T}\mathbf{x}_{\text{new}} + Du\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{\text{new}} &= \mathbf{A}_{\text{new}}\mathbf{x}_{\text{new}} + \mathbf{B}_{\text{new}}u \\ y &= \mathbf{C}_{\text{new}}\mathbf{x}_{\text{new}} + Du\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{A}_{\text{new}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{old}}\mathbf{T} \\ \mathbf{B}_{\text{new}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_{\text{old}} \\ \mathbf{C}_{\text{new}} &= \mathbf{C}_{\text{old}}\mathbf{T}\end{aligned}}$$

- transformace má smysl pro $\mathbf{T}$ regulární
- přenos se nemění

$$\begin{aligned}f(s) &= \mathbf{C}_{\text{new}}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{new}}\right)^{-1}\mathbf{B}_{\text{new}} \\ &= \mathbf{C}_{\text{old}}\mathbf{T}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\text{old}}\mathbf{T}\right)^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_{\text{old}} \\ &= \mathbf{C}_{\text{old}}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{old}}\right)^{-1}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_{\text{old}} \\ &= \mathbf{C}_{\text{old}}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{old}}\right)^{-1}\mathbf{B}_{\text{old}}\end{aligned}$$

- Pozor: někdy jsou nové souřadnice dány „opačně“ vztahem $\mathbf{x}_{\text{new}} = \mathbf{V}\mathbf{x}_{\text{old}}$
  Pak je zřejmě $\mathbf{x}_{\text{old}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_{\text{new}}$, tedy ve vztazích zaměníme $\mathbf{T} = \mathbf{V}^{-1}$

Volný pád a módy systému

Volný pád neboli odezva nebuzeného systému na nenulový počáteční stav

$$x(s)=\frac{\mathrm{adj}(sI-\mathbf{A})\mathbf{x}(0^-)}{\det(sI-\mathbf{A})} \quad \text{(striktně ryzí)} \quad y(s)=\frac{\mathbf{C}\mathrm{adj}(sI-\mathbf{A})\mathbf{x}(0^-)}{\det(sI-\mathbf{A})}$$

Čitatel závisí na konkrétních počátečních podmínkách a moc nás teď nezajímá
Jmenovatel (charakteristický polynom) $\det(sI-A)$ rozložíme na kořenové činitele

$$\prod(s-a_i)\prod(s-b_j)^{m_j}\prod\left((s+\sigma_k)^2+\omega_k^2\right)\prod\left((s+\sigma_l)^2+\omega_l^2\right)^{n_l}$$

pak L. obraz odezvy obsahuje zlomky (čitatele nejsou důležité)

$$\frac{\bullet}{(s-a_i)} \quad \frac{\bullet}{(s-b_j)},\ldots,\frac{\bullet}{(s-b_j)^{m_j}} \quad \frac{\bullet}{(s+\sigma_k)^2+\omega_k^2} \quad \frac{\bullet}{(s+\sigma_l)^2+\omega_l^2},\ldots,\frac{\bullet}{((s+\sigma_l)^2+\omega_l^2))^{n_l}}$$

a odezva v časové oblasti obsahuje složky

těmto složkám říkáme módy

$$e^{a_i t} \quad e^{b_j t},te^{b_j t},\ldots,t^{m_j-1}e^{b_j t}/(m_j-1)! \quad e^{-\sigma t}\sin\omega_k t,e^{-\sigma t}\cos\omega_k t \quad \ldots,te^{-\sigma t}\cos\omega_l t,te^{-\sigma t}\sin\omega_l t,\ldots$$