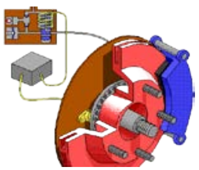
1 - Úvod

Michael Šebek
Automatické řízení 2016

Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Základní názvosloví

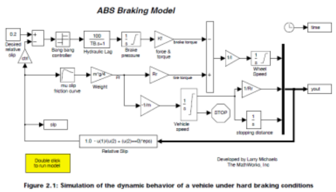
- Objekt: konkrétní auto (tamto)

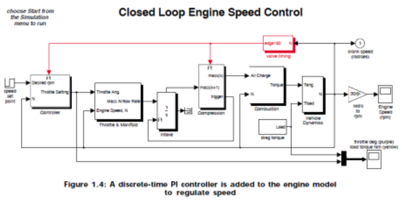


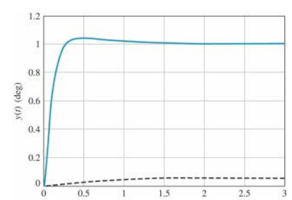
- Systém: určitá část objektu, kterou se zabýváme, řídíme,…
  Motor, spojka, řízení směru (ESC), rychlosti (tempomat), brzdění (ABS,EBS), trakce (TCS), pérování (RSC), emise, spotřeba, HVAC, telematika, infotainment,
  … řízení kolony (AHS),…

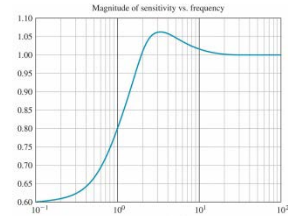
- Model: nějaký vhodný popis (rovnice, diagram, graf, program…)

$$\dot{x} = v\cos\theta$$
$$\dot{y} = v\sin\theta$$
$$\dot{\theta} = \frac{v}{L}\tan\psi$$







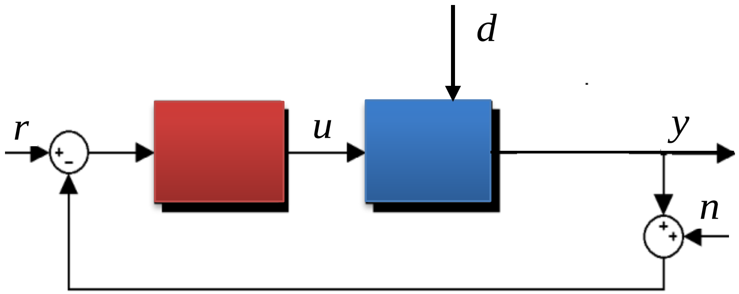


- Různé modely stejného systému pro různé účely: simulace, návrh, …

Základní názvosloví

Systémy

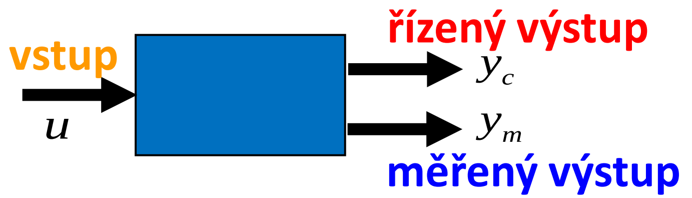
- obecné a zvláštní
- soustava
- regulátor, kompenzátor, zákon řízení,
- celkový systém, uzavřená smyčka

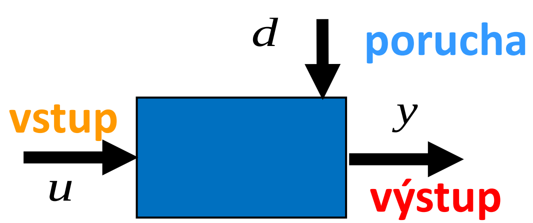


Signály

- nějaká fyzikální veličina
  (pozor: šipka není „drát“)

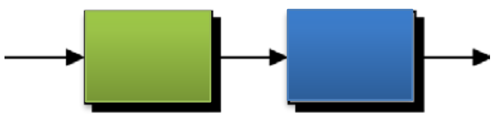
- vstup, akční zásah, reference
- porucha, rušení: měřená, neměřená
- výstup: řízený, měřený
- vnitřní veličiny (stavy)
- šum měření
- regulační odchylka (míra kvality)



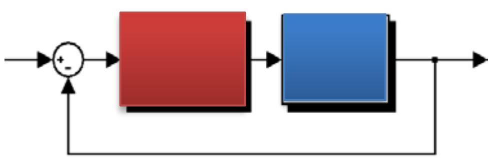


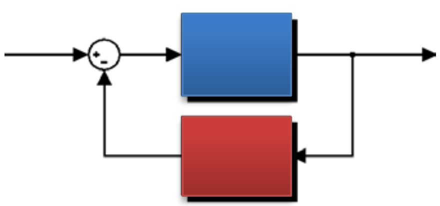
Základní názvosloví

Přímá vazba (PV, FF)

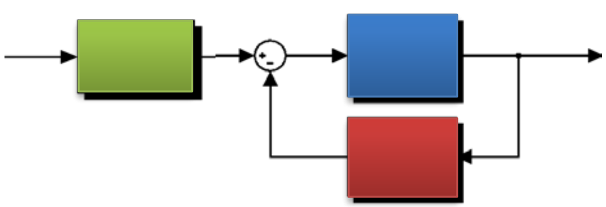


Zpětná vazba (ZV, FB)





Dva stupně volnosti (TDF)

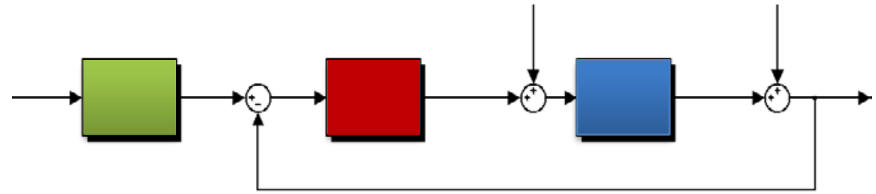


soustava

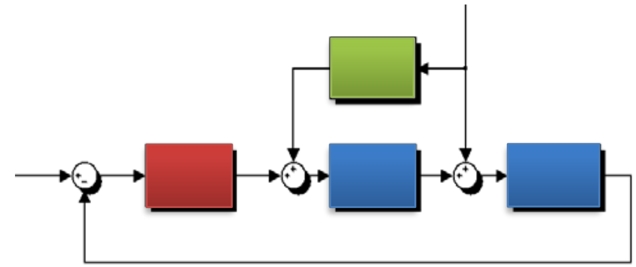
regulátor ZV

regulátor PV

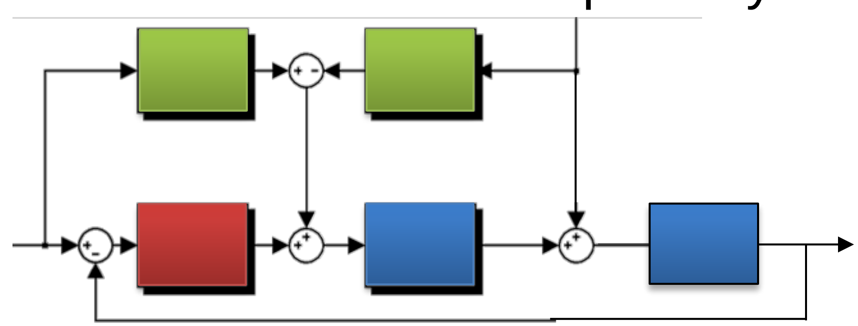
ZV s poruchou a šumem měření



+ FF od měřené poruchy

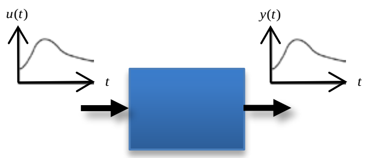


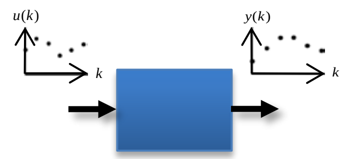
+ FF od reference a poruchy

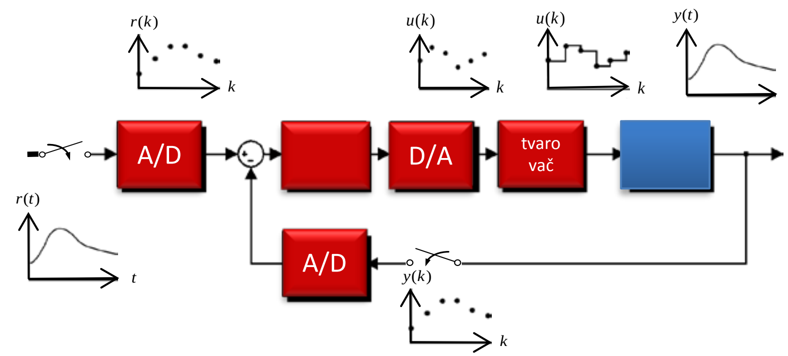


Základní názvosloví

- spojitý (čas) - diskrétní (čas) - vzorkovaný







- SISO - MIMO

- soustředěné - rozložené parametry, dopravní zpoždění
- neproměnný - proměnný v čase
- lineární - nelineární

Nelineární stavový model

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

Stavová rovnice - vektorová nelineární diferenciální rovnice prvního řádu

Výstupní rovnice - není diferenciální

výstup, stav, vstup, čas - obecně vektory

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

- řešení závisí na vstupu a počátečním stavu $\mathbf{x}(t_0^-) = \mathbf{x}_0$ (a na poč. čase)

Zvláštní případy:

- model nezávisí na posunu v čase, je v čase neproměnný (TI)
- autonomní systém, neřízený
- systém typu statická nelinearita

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$\longrightarrow$ $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$

$\longrightarrow$ $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{u})$

Zvláštní typ řešení:

- periodické, tzv. limitní cyklus
- ekvilibrium, rovnovážný, ustálený stav

$$\mathbf{u}_e(t) = \mathbf{u}_e, \mathbf{x}_e(t) = \mathbf{x}_e \Rightarrow \mathbf{0} = \dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e(t), \mathbf{u}_e(t))$$

Lineární stavový model

- Linearita (homogennost + aditivnost): obecný lineární systém $y = \mathcal{S}(u)$ je lineární vzhledem k vstupu a výstupu, právě když (při stejných pp.)

$$y_1 = \mathcal{S}(u_1), y_2 = \mathcal{S}(u_2) \Rightarrow y = \mathcal{S}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

- Lineární systémy mají spoustu příjemných vlastností, které umožňují užívat mnoho užitečných nástrojů (frekvenční charakteristika, …)
- Lineární stavový model má tvar

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned} \qquad \mathbf{x}(t_0^-) = \mathbf{x}_0$$

LTV

- Je-li navíc časově neproměnný, pak

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \qquad \mathbf{x}(t_0^-) = \mathbf{x}_0$$

LTI

- Co dělat, když náš systém takový není?

Modely vstup-výstup (vnější)

- Popisuje vstup, výstup a jejich vyšší derivace, vnitřní veličiny přímo ne
- Předpokládá se, že příslušné derivace existují, alespoň ve smyslu distribucí
- Obecné nelineární IO modely jsou dost divoké, kurz ARI vystačí s

$$\mathbf{D}(\mathbf{y}^{(n)}(t),\ldots,\dot{\mathbf{y}}(t),\mathbf{y}(t),t)=\mathbf{N}(\mathbf{u}^{(m)}(t),\ldots,\dot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{u}(t),t)$$

- a jeho lineárním LTV případem

$$\mathbf{a}_n(t)\mathbf{y}^{(n)}(t)+\cdots+\mathbf{a}_1(t)\dot{\mathbf{y}}+\mathbf{a}_0(t)\mathbf{y}(t)=\mathbf{b}_m(t)\mathbf{u}^{(m)}(t)+\cdots+\mathbf{b}_1(t)\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{b}_0(t)\mathbf{u}(t)$$

  jehož řešení závisí na vstupu (včetně jeho příslušných derivací) a na počátečních podmínkách $\mathbf{y}^{(n-1)}(t_0^-),\ldots,\dot{\mathbf{y}}(t_0^-),\mathbf{y}(t)$

- V LTI variantě je to

$$\mathbf{a}_n\mathbf{y}^{(n)}(t)+\cdots+\mathbf{a}_1\dot{\mathbf{y}}(t)+\mathbf{a}_0\mathbf{y}(t)=\mathbf{b}_m\mathbf{u}^{(m)}(t)+\cdots+\mathbf{b}_1\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{b}_0\mathbf{u}(t)$$

  s počátečními podmínkami $\mathbf{y}^{(n-1)}(0^-),\ldots,\dot{\mathbf{y}}(0^-),\mathbf{y}(0^-)$

Lineární aproximace – tzv. linearizace

- Vybereme nějaké nominální řešení (trajektorii), ve kterém chceme systém provozovat. Například referenční trajektorie robota, limitní cyklus nebo, nejčastěji, ekvilibrium - tomu říkáme pracovní (operační) bod
- V okolí nominálního řešení (pracovního bodu) nahradíme nelineární model jeho lineární odchylkovou aproximací - „tečnou dynamikou“
- Často tomu nepřesně říkáme linearizace, přesnější je lineární aproximace (neboť jsou ještě jiné linearizace, třeba tzv. přesná linearizace)

Funguje to pokud

1) je systém (v provozovaných režimech) skoro lineární nebo

2) zůstává blízko pracovního bodu: malé odchylky, „malé signály“

V systémech ZV automatického řízení bývá 2) často splněno

Pozor: aproximace je vždy vztažena k určitému pracovnímu bodu a platí jen pro malé odchylky od něj - nezapomeň!

- Když 1) ani 2) neplatí, přepíná se někdy více regulátorů založených na aproximacích v různých pracovních bodech (tzv. gain scheduling)
- V některých případech aproximace neexistuje nebo je k ničemu
- Někdy aproximaci nechceme/nemůžeme použít (stabilizace kyvadla vs. vztyčení)

Lineární aproximace - „linearizace“

V okolí nominálního řešení (pracovního bodu) platí

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$$
$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_p(t) + \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t))$$

$$= \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) + \cancel{\text{členy vyšších řádů}}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t))$$

$$= \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) + \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) + \cancel{\text{členy vyšších řádů}}$$

- kde rozvíjíme nelineární funkce v Taylorovy řady v okolí nominálního řešení (pokud parciální derivace existují)
- Pro malé odchylky tak dostáváme lineární aproximaci

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) \\ \Delta\mathbf{y}(t) &= \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t)\end{aligned}}$$

Lineární aproximace - shrnutí

Nelineární model v okolí nominálního řešení aproximujeme lineárním

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\end{aligned} \quad \xrightarrow{\mathbf{x}_p(t),\mathbf{u}_p(t)} \quad \begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(t)\\ \Delta\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\Delta\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

Pozor: platí pro odchylky, ale často se píše bez Δ !

- kde jsou

$$\mathbf{A}=\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)},\mathbf{B}=\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)},C=\left.\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)},D=\left.\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}$$

  Jacobiho matice funkcí $\mathbf{f},\mathbf{h}$ vyčíslené v nominálním „bodě“ $\left(\mathbf{x}_p(t),\mathbf{u}_p(t)\right)$

- Např.

$$\mathbf{A}=\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p,\mathbf{u}=\mathbf{u}_p},\ldots$$

- jde to i pro časově proměnné systémy,
  stačí všude připsat t a dostaneme $\mathbf{A}(t),\mathbf{B}(t),\mathbf{C}(t),\mathbf{D}(t)$

Lineární aproximace IO modelu

- V okolní nominálního řešení či pracovního bodu $\mathbf{y}_p(t),\mathbf{u}_p(t)$ můžeme IO model aproximovat lineárním podobně jako stavový
- Vyjádříme $\mathbf{D}(\mathbf{y}^{(n)}(t),\ldots,\dot{\mathbf{y}}(t),\mathbf{y}(t),t)=\mathbf{N}(\mathbf{u}^{(m)}(t),\ldots,\dot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{u}(t),t)$
  pro $\mathbf{y}(t)=\mathbf{y}_p(t)+\Delta\mathbf{y}(t),\ldots,\mathbf{y}^{(n)}(t)=\mathbf{y}_p^{(n)}(t)+\Delta\mathbf{y}^{(n)}(t),$

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}_p(t)+\Delta\mathbf{u}(t),\ldots,\mathbf{u}^{(m)}(t)=\mathbf{u}_p^{(m)}(t)+\Delta\mathbf{u}^{(m)}(t)$$

- Použitím Taylorových řad dostáváme postupně

$$\mathbf{D}\big|_p+\left.\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\mathbf{y}}\right|_p\Delta\mathbf{y}+\left.\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\right|_p\Delta\dot{\mathbf{y}}+\cdots+\left.\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\mathbf{y}^{(n)}}\right|_p\Delta\mathbf{y}^{(n)}+\text{~~členy vyšších řádů~~}$$

$$=\ \mathbf{N}\big|_p+\left.\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\mathbf{u}}\right|_p\Delta\mathbf{u}+\left.\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\dot{\mathbf{u}}}\right|_p\Delta\dot{\mathbf{u}}+\cdots+\left.\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\mathbf{u}^{(m)}}\right|_p\Delta\mathbf{u}^{(m)}+\text{~~členy vyšších řádů~~}$$

$$\left.\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\mathbf{y}}\right|_p\Delta\mathbf{y}+\left.\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\right|_p\Delta\dot{\mathbf{y}}+\cdots+\left.\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\mathbf{y}^{(n)}}\right|_p\Delta\mathbf{y}^{(n)}\cong\left.\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\mathbf{u}}\right|_p\Delta\mathbf{u}+\left.\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\dot{\mathbf{u}}}\right|_p\Delta\dot{\mathbf{u}}+\cdots+\left.\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\mathbf{u}^{(m)}}\right|_p\Delta\mathbf{u}^{(m)}$$

- Lineární aproximace je $\mathbf{a}_0\Delta\mathbf{y}+\mathbf{a}_1\Delta\dot{\mathbf{y}}+\cdots+\mathbf{a}_n\Delta\mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{b}_0\Delta\mathbf{u}+\mathbf{b}_1\Delta\dot{\mathbf{u}}+\cdots+\mathbf{b}_m\Delta\mathbf{u}^{(m)}$

Diskrétní stavový model

Proměnný v čase | Neproměnný v čase

- Nelineární

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{f}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k),k)$$
$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{h}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k),k)$$

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{f}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k))$$
$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{h}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k))$$

- Lineární

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

- Počáteční stav

$$\mathbf{x}(k_0)=\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$$

- Rovnovážný, ustálený stav - ekvilibrium

$$\mathbf{u}_e(k)=\mathbf{u}_e,\ \mathbf{x}_e(k)=\mathbf{x}_e \Rightarrow \mathbf{x}_e=\mathbf{f}(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)$$

Diskrétní model vstup-výstup (vnější)

- Nelineární

$$\mathbf{D}(\mathbf{y}(k+n),\ldots,\mathbf{y}(k+1),\mathbf{y}(k),k)=\mathbf{N}(\mathbf{u}(k+m),\ldots,\mathbf{u}(k+1),\mathbf{u}(k),k)$$

- Lineární v čase proměnný (LTV)

$$\mathbf{a}_n(k)\mathbf{y}(k+n)+\cdots+\mathbf{a}_1(k)\mathbf{y}(k+1)+\mathbf{a}_0(k)\mathbf{y}(k)$$
$$=\mathbf{b}_m(k)\mathbf{u}(k+m)+\cdots+\mathbf{b}_1(k)\mathbf{u}(k+1)+\mathbf{b}_0(k)\mathbf{u}(k)$$

s „počátečními“ podmínkami $\mathbf{y}(k+n-1),\ldots,\mathbf{y}(k+1),\mathbf{y}(k)$

- Lineární v čase neproměnný (LTI)

$$\mathbf{a}_n\mathbf{y}(k+n)+\cdots+\mathbf{a}_1\mathbf{y}(k+1)+\mathbf{a}_0\mathbf{y}(k)$$
$$=\mathbf{b}_m\mathbf{u}(k+m)+\cdots+\mathbf{b}_1\mathbf{u}(k+1)+\mathbf{b}_0\mathbf{u}(k)$$

s „počátečními“ podmínkami $\mathbf{y}(n-1),\ldots,\mathbf{y}(1),\mathbf{y}(0)$

Lineární aproximace diskrétních modelů

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k))\\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k))\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k) &= \mathbf{x}_p(k) + \Delta\mathbf{x}(k)\\ \mathbf{u}(k) &= \mathbf{u}_p(k) + \Delta\mathbf{u}(k)\\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{y}_p(k) + \Delta\mathbf{y}(k)\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}_p(k+1) + \Delta\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(k) + \Delta\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_p(k) + \Delta\mathbf{u}(k))$$

$$\cong \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(k),\mathbf{u}_p(k)) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(k) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}_p(k) + \Delta\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_p(k) + \Delta\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_p(k) + \Delta\mathbf{u}(k))$$

$$\cong \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(k),\mathbf{u}_p(k)) + \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(k) + \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(k)$$

Je to jako u spojitých modelů: čas je sice diskrétní, ale hodnoty jsou spojité (kontinuum)

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\mathbf{x}(k+1) &\cong \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(k) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(k)\\ \Delta\mathbf{y}(k) &\cong \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(k) + \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(k)\end{aligned}}$$