1 - Úvod

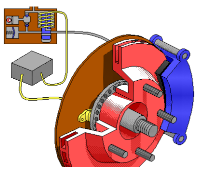
Michael Šebek

Automatické řízení 2019

05.02.2019

Základní názvosloví

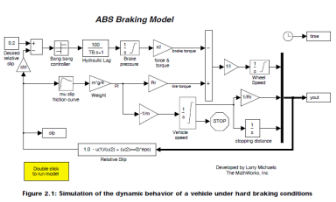
- Objekt: konkrétní auto (tamto)

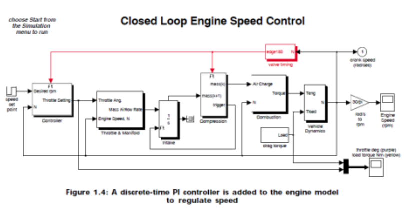


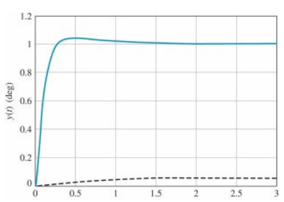
- Systém: určitá část objektu, kterou se zabýváme, řídíme,…
  Motor, spojka, řízení směru (ESC), rychlosti (tempomat), brzdění (ABS,EBS), trakce (TCS), pérování (RSC), emise, spotřeba, HVAC, telematika, infotainment,
  … řízení kolony (AHS),…

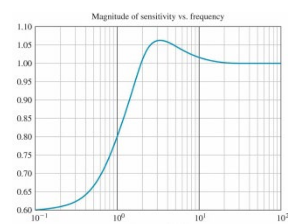
- Model: nějaký vhodný popis (rovnice, diagram, graf, program…)

$$\dot{x} = v\cos\theta \qquad \dot{y} = v\sin\theta \qquad \dot{\theta} = \frac{v}{L}\tan\psi$$







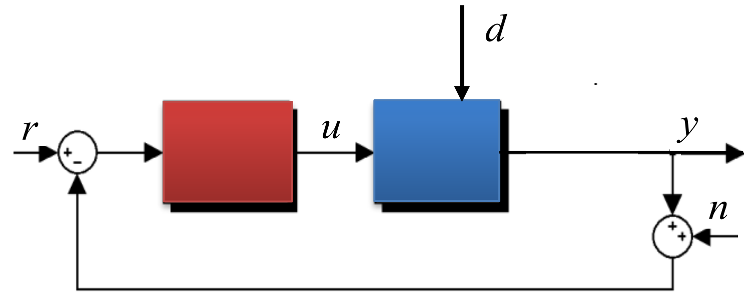


- Různé modely stejného systému pro různé účely: simulace, návrh, …

Základní názvosloví

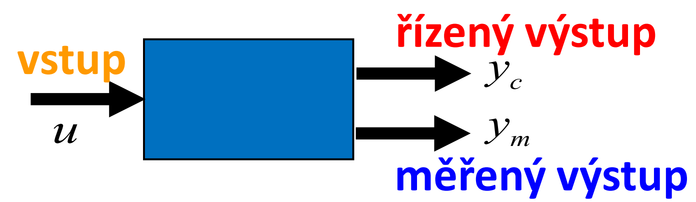
Systémy

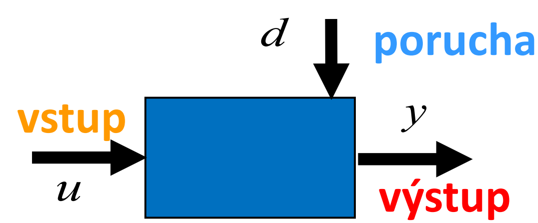
- obecné a zvláštní
- soustava
- regulátor, kompenzátor, zákon řízení,
- celkový systém, uzavřená smyčka



Signály

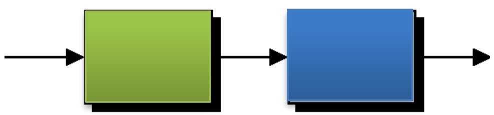
- nějaká fyzikální veličina
  (pozor: šipka není „drát“)
- vstup, akční zásah, reference
- porucha, rušení: měřená, neměřená
- výstup: řízený, měřený
- vnitřní veličiny (stavy)
- šum měření
- regulační odchylka (míra kvality)





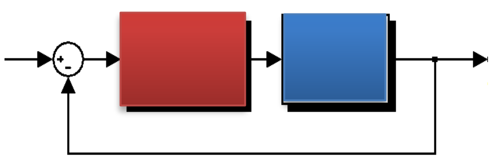
Základní názvosloví

Přímá vazba (PV, FF)

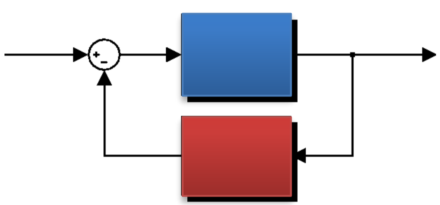


soustava

Zpětná vazba (ZV, FB)

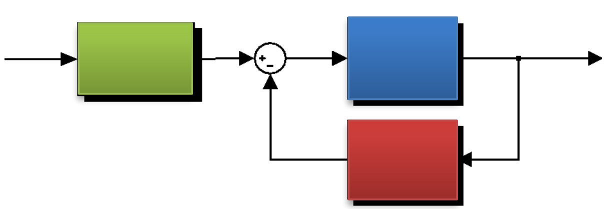


regulátor ZV

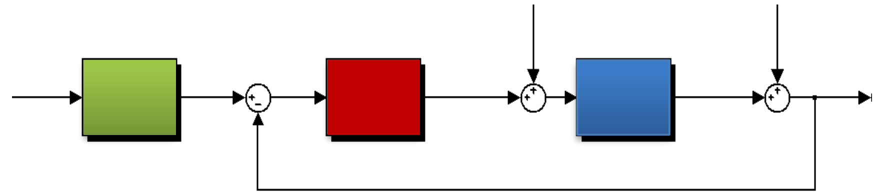


regulátor PV

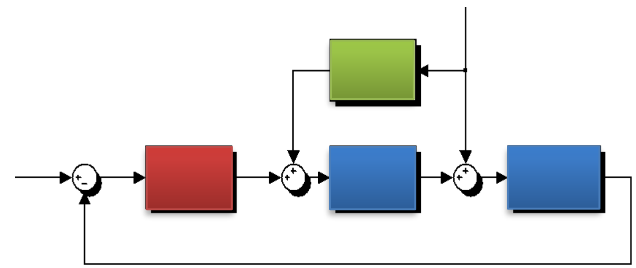
Dva stupně volnosti (TDF)



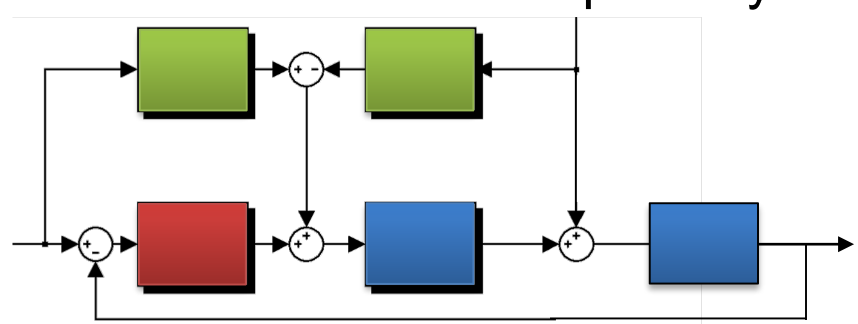
ZV s poruchou a šumem měření



+ FF od měřené poruchy

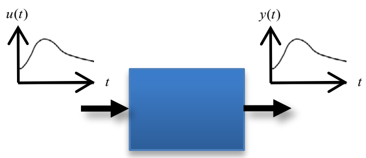


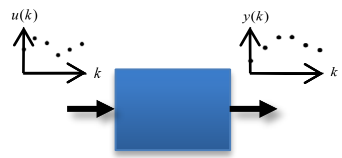
+ FF od reference a poruchy

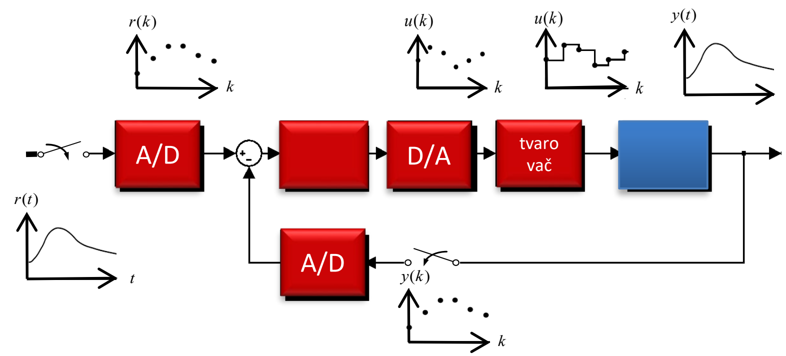


Základní názvosloví

- spojitý (čas) - diskrétní (čas) - vzorkovaný







- SISO - MIMO

- soustředěné - rozložené parametry, dopravní zpoždění
- neproměnný - proměnný v čase
- lineární - nelineární

Nelineární model vnitřní (stavový)

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)$$
$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{h}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)$$

Stavová rovnice - vektorová nelineární diferenciální rovnice prvního řádu

Výstupní rovnice - není diferenciální

výstup, stav, vstup, čas - obecně vektory $\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix},\mathbf{f}=\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$

- řešení závisí na vstupu a počátečním stavu $\mathbf{x}(t_0^-)=\mathbf{x}_0$ (a na poč. čase)

Zvláštní případy:

- model nezávisí na posunu v čase, je v čase neproměnný (TI)

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)),\quad \mathbf{x}(0^-)=\mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{h}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))$$

- autonomní systém, neřízený $\longrightarrow$ $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{y}=\mathbf{h}(\mathbf{x})$
- systém typu statická nelinearita $\longrightarrow$ $\mathbf{y}=\mathbf{h}(\mathbf{u})$

Zvláštní typ řešení:

- periodické, tzv. limitní cyklus $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t+T)$
- ekvilibrium, rovnovážný, ustálený stav $\mathbf{u}_e(t)=\mathbf{u}_e,\mathbf{x}_e(t)=\mathbf{x}_e \Rightarrow$

$$\mathbf{0}=\dot{\mathbf{x}}_e(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x}_e(t),\mathbf{u}_e(t))$$

Lineární model vnitřní (stavový)

- Linearita (homogennost + aditivnost): obecný lineární systém $y = \mathcal{S}(u)$ je lineární vzhledem k vstupu a výstupu, právě když (při stejných pp.)

$$y_1 = \mathcal{S}(u_1), y_2 = \mathcal{S}(u_2) \Rightarrow y = \mathcal{S}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

- Lineární systémy mají spoustu příjemných vlastností a umožňují užívat mnoho užitečných nástrojů: frekvenční charakteristika, přenosy, …

- Lineární stavový model má tvar

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\end{aligned} \qquad \mathbf{x}(t_0^-) = \mathbf{x}_0$$

LTV

- Je-li navíc časově neproměnný, pak

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned} \qquad \mathbf{x}(t_0^-) = \mathbf{x}_0$$

LTI

Modely vnější (vstup-výstup)

- Popisuje vstup, výstup a jejich vyšší derivace, vnitřní veličiny přímo ne
- Předpokládá se, že příslušné derivace existují, alespoň ve smyslu distribucí
- Nelineární model vstup-výstup (input-output, IO)

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}^{(n)}(t),\ldots,\dot{\mathbf{y}}(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{u}^{(m)}(t),\ldots,\dot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{u}(t),t)=\mathbf{0}$$

- Lineární v čase proměnný model (LTV)

$$\mathbf{a}_n(t)\mathbf{y}^{(n)}(t)+\cdots+\mathbf{a}_1(t)\dot{\mathbf{y}}(t)+\mathbf{a}_0(t)\mathbf{y}(t)=\mathbf{b}_m(t)\mathbf{u}^{(m)}(t)+\cdots+\mathbf{b}_1(t)\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{b}_0(t)\mathbf{u}(t)$$

- řešení závisí na počátku t_0, na vstupu $\mathbf{u}(\tau),\tau\in[t_0,t]$
  a na počátečních podmínkách $\mathbf{y}^{(n-1)}(t_0^-),\ldots,\dot{\mathbf{y}}(t_0^-),\mathbf{y}(t_0^-)$

- Lineární v čase neproměnný model (LTI)

$$\mathbf{a}_n\mathbf{y}^{(n)}(t)+\cdots+\mathbf{a}_1\dot{\mathbf{y}}(t)+\mathbf{a}_0\mathbf{y}(t)=\mathbf{b}_m\mathbf{u}^{(m)}(t)+\cdots+\mathbf{b}_1\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{b}_0\mathbf{u}(t)$$

s $\mathbf{u}(\tau),\tau\in[0,t]$ a $\mathbf{y}^{(n-1)}(0^-),\ldots,\dot{\mathbf{y}}(0^-),\mathbf{y}(0^-)$

Aproximace nelineárního lineárním

- Vybereme nominální řešení, v jehož okolí chceme systém provozovat: referenční trajektorie, limitní cyklus nebo ekvilibrium = pracovní, operační bod
- V okolí nominálního řešení (pracovního bodu) nahradíme nelineární model jeho lineární odchylkovou aproximací - „tečnou dynamikou“
- Často tomu nepřesně říkáme linearizace, přesnější je lineární aproximace

Postup funguje a je užitečný, pokud

1) je systém (v provozovaných režimech) skoro lineární nebo

2) zůstává blízko pracovního bodu: malé odchylky, „malé signály“

V systémech ZV automatického řízení bývá 2) často splněno

- Aproximace je vždy vztažena k určitému pracovnímu bodu a platí jen pro malé odchylky od něj!
- Když 1) ani 2) neplatí, přepíná se někdy více regulátorů založených na aproximacích v různých pracovních bodech (tzv. gain scheduling)
- V některých případech aproximace neexistuje nebo je k ničemu
- Aproximaci nemůžeme použít, je-li sama úloha „nelineární:“

stabilizace kyvadla vs. vztyčení

Lineární aproximace stavového modelu

V okolí nominálního řešení (pracovního bodu) platí

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$$
$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_p(t) + \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t))$$

$$\| $$

$$= \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) + \cancel{\text{členy vyšších řádů}}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t))$$

$$\| $$

$$= \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) + \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) + \cancel{\text{členy vyšších řádů}}$$

- kde rozvíjíme nelineární funkce v Taylorovy řady v okolí nominálního řešení (pokud parciální derivace existují)
- Pro malé odchylky tak dostáváme lineární aproximaci

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) \\ \Delta\mathbf{y}(t) &= \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) \end{aligned}}$$

Lineární aproximace stavově - shrnutí

Nelineární model v okolí nominálního řešení aproximujeme lineárním

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\end{aligned} \quad \xrightarrow{\mathbf{x}_p(t),\mathbf{u}_p(t)} \quad \begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(t) \\ \Delta\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\Delta\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

Pozor: platí pro odchylky, ale často se píše bez Δ !

- kde jsou

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}, \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}, C = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}, D = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}$$

  Jacobiho matice funkcí $\mathbf{f},\mathbf{h}$ vyčíslené v nominálním „bodě“ $\left(\mathbf{x}_p(t),\mathbf{u}_p(t)\right)$

- Např.

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p,\mathbf{u}=\mathbf{u}_p}, \ldots$$

- jde to i pro časově proměnné systémy,
  stačí všude připsat t a dostaneme $\mathbf{A}(t),\mathbf{B}(t),\mathbf{C}(t),\mathbf{D}(t)$

Lineární aproximace IO modelu

- V okolní nominálního řešení (pracovního bodu) $\mathbf{y}_p(t),\ldots,\mathbf{y}_p^{(n)}(t),\mathbf{u}_p(t),\ldots,\mathbf{u}_p^{(m)}(t)$ (samozřejmě platí $\mathbf{g}\left(\mathbf{y}_p(t),\ldots,\mathbf{u}_p^{(m)}(t)\right)=\mathbf{g}_p\left(\ldots\right)=\mathbf{0}$) aproximujeme nelineární lineárním
- Vyjádříme $\mathbf{g}(\mathbf{y}^{(n)}(t),\ldots,\dot{\mathbf{y}}(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{u}^{(m)}(t),\ldots,\dot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{u}(t))=\mathbf{0}$

  pro
$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t)&=\mathbf{y}_p(t)+\Delta\mathbf{y}(t),\ldots,\mathbf{y}^{(n)}(t)=\mathbf{y}_p^{(n)}(t)+\Delta\mathbf{y}^{(n)}(t),\\ \mathbf{u}(t)&=\mathbf{u}_p(t)+\Delta\mathbf{u}(t),\ldots,\mathbf{u}^{(m)}(t)=\mathbf{u}_p^{(m)}(t)+\Delta\mathbf{u}^{(m)}(t)\end{aligned}$$

- Použitím Taylorových řad dostáváme postupně

$$0=\ \mathbf{g}\big|_p+\left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{y}}\right|_p\Delta\mathbf{y}+\left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\right|_p\Delta\dot{\mathbf{y}}+\cdots+\left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{y}^{(n)}}\right|_p\Delta\mathbf{y}^{(n)}$$
$$+\left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{u}}\right|_p\Delta\mathbf{u}+\left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\dot{\mathbf{u}}}\right|_p\Delta\dot{\mathbf{u}}+\cdots+\left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{u}^{(m)}}\right|_p\Delta\mathbf{u}^{(m)}+\ \text{členy }\cancel{\text{vyšších}}\text{ řádů}\ =\mathbf{0}$$

- Lineární aproximace je $\mathbf{a}_0\Delta\mathbf{y}+\mathbf{a}_1\Delta\dot{\mathbf{y}}+\cdots+\mathbf{a}_n\Delta\mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{b}_0\Delta\mathbf{u}+\mathbf{b}_1\Delta\dot{\mathbf{u}}+\cdots+\mathbf{b}_m\Delta\mathbf{u}^{(m)}$

Lineární aproximace zvnějšku - shrnutí

Nelineární model v okolí nominálního řešení aproximujeme lineárním

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}^{(n)}(t),\ldots,\dot{\mathbf{y}}(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{u}^{(m)}(t),\ldots,\dot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{u}(t))=\mathbf{0} \quad \downarrow \; \mathbf{x}_p(t),\mathbf{u}_p(t)$$

$$\mathbf{a}_0\Delta\mathbf{y}+\mathbf{a}_1\Delta\dot{\mathbf{y}}+\cdots+\mathbf{a}_n\Delta\mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{b}_0\Delta\mathbf{u}+\mathbf{b}_1\Delta\dot{\mathbf{u}}+\cdots+\mathbf{b}_m\Delta\mathbf{u}^{(m)}$$

Pozor: platí pro odchylky, ale často se píše bez Δ !

- Kde

$$\mathbf{a}_0=\left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{y}}\right|_p=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots\\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p\\ \vdots\\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)}\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p\\ \vdots\\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}},\quad \mathbf{a}_1=\left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\right|_p=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial \dot{y}_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \dot{y}_2} & \cdots\\ \frac{\partial g_2}{\partial \dot{y}_1} & \frac{g_2}{\partial \dot{y}_2} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p\\ \vdots\\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)}\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p\\ \vdots\\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}},\quad\cdots$$

$$\mathbf{b}_0=\left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{u}}\right|_p=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots\\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p\\ \vdots\\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)}\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p\\ \vdots\\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}},\quad \mathbf{b}_1=\left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\dot{\mathbf{u}}}\right|_p=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial \dot{u}_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \dot{u}_2} & \cdots\\ \frac{\partial g_2}{\partial \dot{u}_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \dot{u}_2} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{y}=\mathbf{y}_p\\ \vdots\\ \mathbf{y}^{(n)}=\mathbf{y}_p^{(n)}\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_p\\ \vdots\\ \mathbf{u}^{(m)}=\mathbf{u}_p^{(m)}}},\quad\cdots$$

jsou Jacobiho matice funkce $\mathbf{g}$ vyčíslené v $\left(\mathbf{x}_p(t),\mathbf{u}_p(t)\right)$

Diskrétní stavový model

Proměnný v čase

- Nelineární

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$$

- Lineární

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)$$

Neproměnný v čase

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

- Počáteční stav

$$\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0 \qquad\qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

- Rovnovážný, ustálený stav - ekvilibrium

$$\mathbf{u}_e(k) = \mathbf{u}_e,\ \mathbf{x}_e(k) = \mathbf{x}_e \Rightarrow \mathbf{x}_e = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$$

Diskrétní model vnější (vstup-výstup)

- Nelineární

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(k+n),\ldots,\mathbf{y}(k+1),\mathbf{y}(k),\mathbf{u}(k+m),\ldots,\mathbf{u}(k+1),\mathbf{u}(k),k)=\mathbf{0}$$

- Lineární v čase proměnný (LTV)

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_n(k)\mathbf{y}(k+n)+\cdots+\mathbf{a}_1(k)\mathbf{y}(k+1)+\mathbf{a}_0(k)\mathbf{y}(k)\\ =\mathbf{b}_m(k)\mathbf{u}(k+m)+\cdots+\mathbf{b}_1(k)\mathbf{u}(k+1)+\mathbf{b}_0(k)\mathbf{u}(k)\end{aligned}$$

s „počátečními“ podmínkami $\mathbf{y}(k_0+n-1),\ldots,\mathbf{y}(k_0+1),\mathbf{y}(k_0),k_0$

- Lineární v čase neproměnný (LTI)

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_n\mathbf{y}(k+n)+\cdots+\mathbf{a}_1\mathbf{y}(k+1)+\mathbf{a}_0\mathbf{y}(k)\\ =\mathbf{b}_m\mathbf{u}(k+m)+\cdots+\mathbf{b}_1\mathbf{u}(k+1)+\mathbf{b}_0\mathbf{u}(k)\end{aligned}$$

s „počátečními“ podmínkami $\mathbf{y}(n-1),\ldots,\mathbf{y}(1),\mathbf{y}(0)$

Lineární aproximace diskrétních modelů

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k))\\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k))\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k) &= \mathbf{x}_p(k)+\Delta\mathbf{x}(k)\\ \mathbf{u}(k) &= \mathbf{u}_p(k)+\Delta\mathbf{u}(k)\\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{y}_p(k)+\Delta\mathbf{y}(k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}_p(k+1)+\Delta\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(k)+\Delta\mathbf{x}(k),\mathbf{u}_p(k)+\Delta\mathbf{u}(k))\\ &\cong \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(k),\mathbf{u}_p(k)) + \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}\Delta\mathbf{x}(k) + \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}\Delta\mathbf{u}(k)\\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{y}_p(k)+\Delta\mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(k)+\Delta\mathbf{x}(k),\mathbf{u}_p(k)+\Delta\mathbf{u}(k))\\ &\cong \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(k),\mathbf{u}_p(k)) + \left.\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}\Delta\mathbf{x}(k) + \left.\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}\Delta\mathbf{u}(k)\end{aligned}$$

Je to jako u spojitých:
čas je sice diskrétní,
ale hodnoty jsou spojité!

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\mathbf{x}(k+1) &\cong \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}\Delta\mathbf{x}(k) + \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}\Delta\mathbf{u}(k)\\ \Delta\mathbf{y}(k) &\cong \left.\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}\Delta\mathbf{x}(k) + \left.\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_p,\mathbf{u}_p)}\Delta\mathbf{u}(k)\end{aligned}}$$