

1 - Úvod



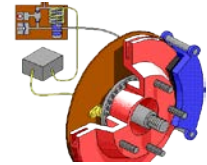
Michael Šebek
Automatické řízení 2018



- **Objekt:** konkrétní auto (tamto)

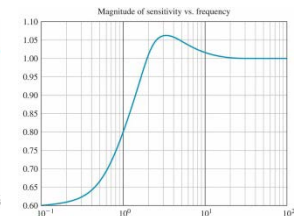
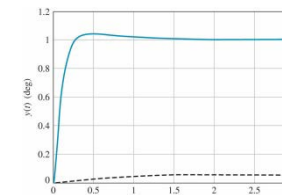
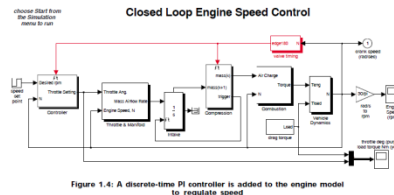
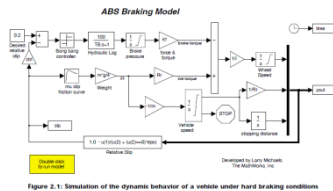


- **System:** určitá část objektu, kterou se zabýváme, řídíme, ... Motor, spojka, řízení směru (ESC), rychlosti (tempomat), brzdění (ABS, EBS), trakce (TCS), pérování (RSC), emise, spotřeba, HVAC, telematika, infotainment, ... řízení kolony (AHS), ...



- **Model:** nějaký vhodný popis (rovnice, diagram, graf, program...)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \frac{v}{L} \tan \psi\end{aligned}$$

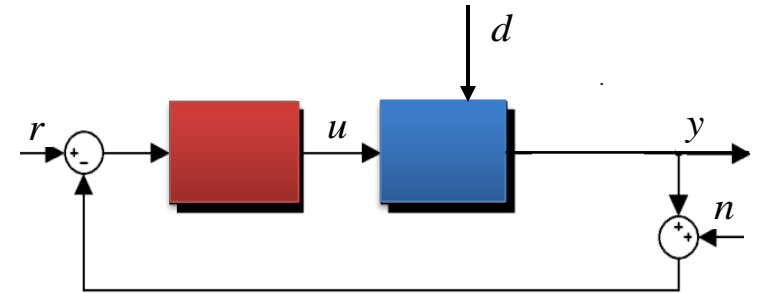


- Různé modely stejného systému pro různé účely: simulace, návrh, ...



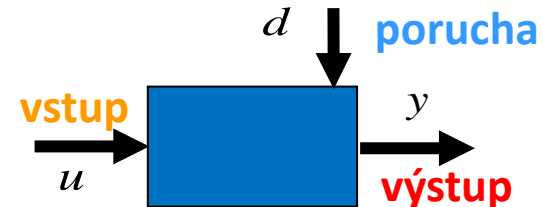
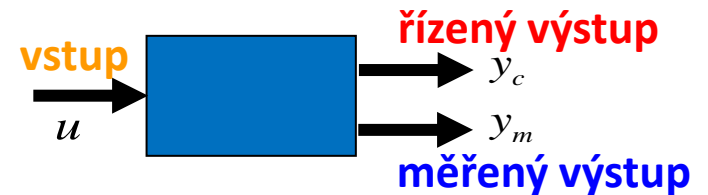
Systemy

- obecné a zvláštní
- soustava
- regulátor, kompenzátor, zákon řízení,
- celkový systém, uzavřená smyčka



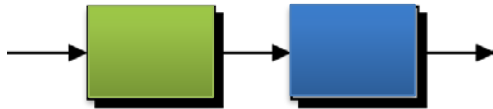
Signály

- nějaká fyzikální veličina (pozor: šipka není „drát“)
- vstup, akční zásah, reference
- porucha, rušení: měřená, neměřená
- výstup: řízený, měřený
- vnitřní veličiny (stavy)
- šum měření
- regulační odchylka (míra kvality)

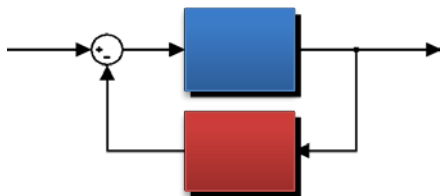
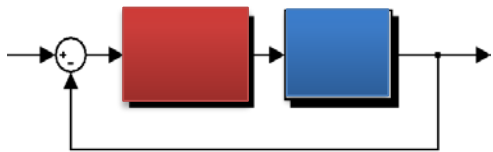




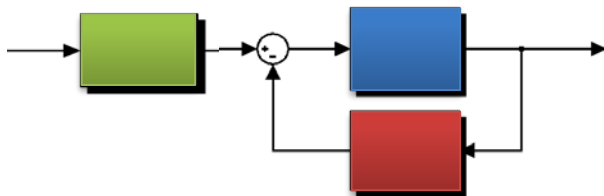
Přímá vazba (PV, FF)



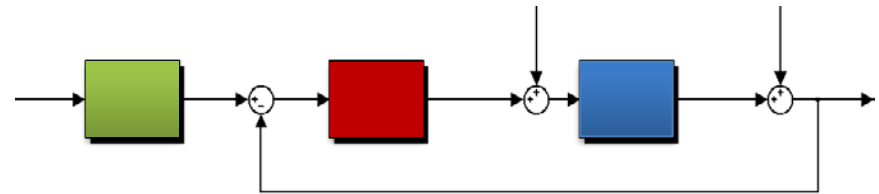
Zpětná vazba (ZV, FB)



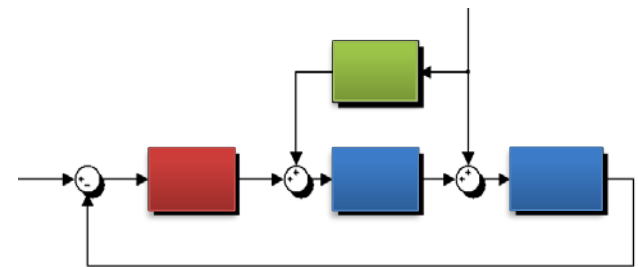
Dva stupně volnosti (TDF)



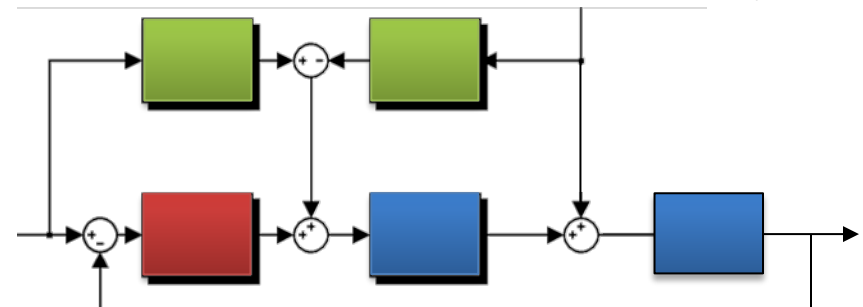
ZV s poruchou a šumem měření



+ FF od měřené poruchy

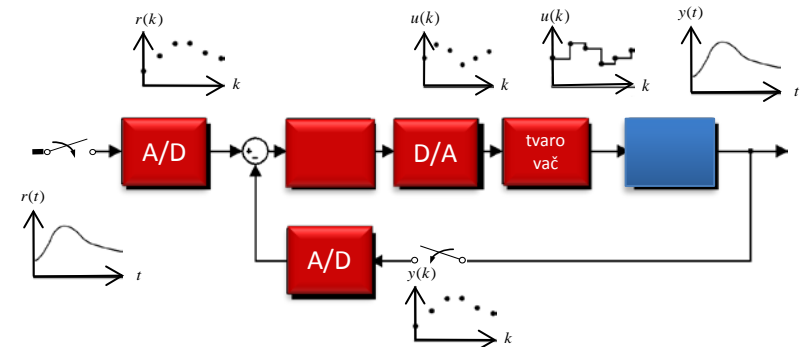
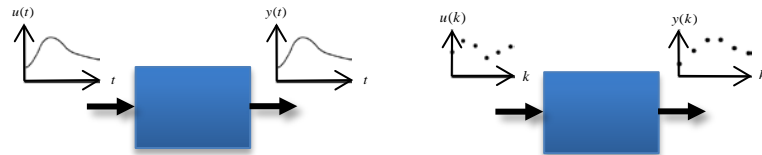


+ FF od reference a poruchy





- spojitý (čas) - diskrétní (čas) - vzorkovaný



- SISO - MIMO



- soustředěné - rozložené parametry, dopravní zpoždění
- neproměnný - proměnný v čase
- lineární - nelineární



Nelineární stavový model

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$



výstup, stav, vstup, čas - obecně vektory

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

Stavová rovnice - vektorová nelineární
diferenciální rovnice **prvního** řádu

Výstupní rovnice - není diferenciální

- řešení závisí na vstupu a počátečním stavu $\mathbf{x}(t_0^-) = \mathbf{x}_0$ (a na poč. čase)

Zvláštní případy:

- model nezávisí na posunu v čase, je v čase **neproměnný** (TI)
- **autonomní** systém, neřízený
- systém typu **statická nelinearita**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\longrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

$$\longrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{u})$$

Zvláštní typ řešení:

- periodické, tzv. limitní cyklus
- **ekvilibrrium**, rovnovážný, ustálený stav

$$\mathbf{u}_e(t) = \mathbf{u}_e, \mathbf{x}_e(t) = \mathbf{x}_e \Rightarrow \mathbf{0} = \dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e(t), \mathbf{u}_e(t))$$



- Linearita (homogennost + aditivnost): obecný lineární systém $y = \mathcal{S}(u)$ je **lineární** vzhledem k vstupu a výstupu, právě když (při stejných pp.)

$$y_1 = \mathcal{S}(u_1), y_2 = \mathcal{S}(u_2) \Rightarrow y = \mathcal{S}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

- Lineární systémy mají spoustu příjemných vlastností, které umožňují užívat mnoho užitečných nástrojů (frekvenční charakteristika, ...)
- Lineární stavový model má tvar

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad \mathbf{x}(t_0^-) = \mathbf{x}_0$$

LTV

- Je-li navíc časově neproměnný, pak

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad \mathbf{x}(t_0^-) = \mathbf{x}_0$$

LTI

- Co dělat, když náš systém takový není?



- Popisuje vstup, výstup a jejich vyšší derivace, vnitřní veličiny přímo ne
- Předpokládá se, že příslušné derivace existují, alespoň ve smyslu distribucí
- Obecné nelineární IO modely jsou dost divoké, kurz ARI vystačí s

$$\mathbf{D}(\mathbf{y}^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}(t), \mathbf{y}(t), t) = \mathbf{N}(\mathbf{u}^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

- a jeho lineárním LTV případem

$$\mathbf{a}_n(t)\mathbf{y}^{(n)}(t) + \dots + \mathbf{a}_1(t)\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{a}_0(t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{b}_m(t)\mathbf{u}^{(m)}(t) + \dots + \mathbf{b}_1(t)\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{b}_0(t)\mathbf{u}(t)$$

jehož řešení závisí na vstupu (včetně jeho příslušných derivací)
a na počátečních podmínkách $\mathbf{y}^{(n-1)}(t_0^-), \dots, \dot{\mathbf{y}}(t_0^-), \mathbf{y}(t_0^-)$

- V LTI variantě je to

$$\mathbf{a}_n\mathbf{y}^{(n)}(t) + \dots + \mathbf{a}_1\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{a}_0\mathbf{y}(t) = \mathbf{b}_m\mathbf{u}^{(m)}(t) + \dots + \mathbf{b}_1\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{b}_0\mathbf{u}(t)$$

s počátečními podmínkami $\mathbf{y}^{(n-1)}(0^-), \dots, \dot{\mathbf{y}}(0^-), \mathbf{y}(0^-)$



Lineární aproximace – tzv. linearizace

Automatické řízení - Kybernetika a robotika

- Vybereme **nominální řešení** (trajektorii), ve kterém chceme systém provozovat: referenční trajektorie, limitní cyklus nebo, nejčastěji,
- **ekvilibrium** - tomu říkáme **pracovní bod** nebo **operační bod**
- V okolí nominálního řešení (pracovního bodu) nahradíme nelineární model jeho lineární odchytkovou aproximací - „tečnou dynamikou“
- Často tomu nepřesně říkáme **linearizace**, přesnější je **lineární aproximace** (neboť jsou ještě jiné linearizace, třeba tzv. přesná linearizace)

Funguje to pokud

- 1) je systém (v provozovaných režimech) skoro lineární nebo
- 2) zůstává blízko pracovního bodu: **malé odchytky**, „malé signály“

V systémech ZV automatického řízení bývá 2) často splněno

- **Aproximace je vždy vztažena k určitému pracovnímu bodu a platí jen pro malé odchytky od něj!**
- Když 1) ani 2) neplatí, přepíná se někdy více regulátorů založených na aproximacích v různých pracovních bodech (tzv. gain scheduling)
- V některých případech aproximace neexistuje nebo je k ničemu
- Někdy aproximaci nechceme/nemůžeme použít (stabilizace kyvadla vs. vztyčení)



V okolí nominálního řešení (pracovního bodu) platí

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}_p(t) + \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t)) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) + \text{členy vyšších řádů} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_p(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t)) \\ &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t)) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) + \text{členy vyšších řádů} \end{aligned}$$

- kde rozvíjíme nelineární funkce v Taylorovy řady v okolí nominálního řešení (pokud parciální derivace existují)
- Pro **malé odchylky** tak dostáváme **lineární aproximaci**

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) \\ \Delta\mathbf{y}(t) &= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(t) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$



Nelineární model v okolí nominálního řešení aproximujeme lineárním

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{array} \quad \xrightarrow{\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t)} \quad \begin{array}{l} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t) \\ \Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}(t) \end{array}$$

Pozor:
platí
pro odchylky,
ale často
se píše bez Δ !

- kde jsou

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}, \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}, \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)}$$

Jacobiho matice funkcí \mathbf{f}, \mathbf{h} vyčíslené v nominálním „bodě“ $(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t))$

- Např.

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p, \mathbf{u}=\mathbf{u}_p}, \dots$$

- jde to i pro časově proměnné systémy,
stačí všude připsat t a dostaneme $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)$



Lineární aproximace IO modelu

- V okolní nominálního řešení (pracovního bodu) $\mathbf{y}_p(t), \dots, \mathbf{y}_p^{(n)}(t), \mathbf{u}_p(t), \dots, \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$ můžeme IO model aproximovat lineárním podobně jako stavový
- Vyjádříme $\mathbf{D}(\mathbf{y}^{(n)}(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}(t), \mathbf{y}(t), t) = \mathbf{N}(\mathbf{u}^{(m)}(t), \dots, \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t), t)$ pro $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \Delta\mathbf{y}(t), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(t) = \mathbf{y}_p^{(n)}(t) + \Delta\mathbf{y}^{(n)}(t),$
 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_p(t) + \Delta\mathbf{u}(t), \dots, \mathbf{u}^{(m)}(t) = \mathbf{u}_p^{(m)}(t) + \Delta\mathbf{u}^{(m)}(t)$

- Použitím Taylorových řad dostáváme postupně

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{D} \Big|_p \right) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_p \Delta \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \Big|_p \Delta \dot{\mathbf{y}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}} \Big|_p \Delta \mathbf{y}^{(n)} + \text{členy vyšších řádů} \\ & = \left(\mathbf{N} \Big|_p \right) + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_p \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_p \Delta \dot{\mathbf{u}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \Big|_p \Delta \mathbf{u}^{(m)} + \text{členy vyšších řádů} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_p \Delta \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \Big|_p \Delta \dot{\mathbf{y}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{y}^{(n)}} \Big|_p \Delta \mathbf{y}^{(n)} \cong \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_p \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_p \Delta \dot{\mathbf{u}} + \dots + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \Big|_p \Delta \mathbf{u}^{(m)}$$

- Lineární aproximace je $\mathbf{a}_0 \Delta \mathbf{y} + \mathbf{a}_1 \Delta \dot{\mathbf{y}} + \dots + \mathbf{a}_n \Delta \mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{b}_0 \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b}_1 \Delta \dot{\mathbf{u}} + \dots + \mathbf{b}_m \Delta \mathbf{u}^{(m)}$



Proměnný v čase

- **Nelineární**

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$$

- **Lineární**

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)$$

- **Počáteční stav**

$$\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$$

- **Rovnovážný, ustálený stav - ekvilibrium**

$$\mathbf{u}_e(k) = \mathbf{u}_e, \mathbf{x}_e(k) = \mathbf{x}_e \Rightarrow \mathbf{x}_e = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$$

Neproměnný v čase

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$



Diskrétní model vstup-výstup (vnější)

- Nelineární

$$\mathbf{D}(\mathbf{y}(k+n), \dots, \mathbf{y}(k+1), \mathbf{y}(k), k) = \mathbf{N}(\mathbf{u}(k+m), \dots, \mathbf{u}(k+1), \mathbf{u}(k), k)$$

- Lineární v čase proměnný (LTV)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n(k)\mathbf{y}(k+n) + \dots + \mathbf{a}_1(k)\mathbf{y}(k+1) + \mathbf{a}_0(k)\mathbf{y}(k) \\ = \mathbf{b}_m(k)\mathbf{u}(k+m) + \dots + \mathbf{b}_1(k)\mathbf{u}(k+1) + \mathbf{b}_0(k)\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

s „počátečními“ podmínkami $\mathbf{y}(k+n-1), \dots, \mathbf{y}(k+1), \mathbf{y}(k)$

- Lineární v čase neproměnný (LTI)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n\mathbf{y}(k+n) + \dots + \mathbf{a}_1\mathbf{y}(k+1) + \mathbf{a}_0\mathbf{y}(k) \\ = \mathbf{b}_m\mathbf{u}(k+m) + \dots + \mathbf{b}_1\mathbf{u}(k+1) + \mathbf{b}_0\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

s „počátečními“ podmínkami $\mathbf{y}(n-1), \dots, \mathbf{y}(1), \mathbf{y}(0)$



Lineární aproximace diskrétních modelů

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k) &= \mathbf{x}_p(k) + \Delta\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) &= \mathbf{u}_p(k) + \Delta\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{y}_p(k) + \Delta\mathbf{y}(k)\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}_p(k+1) + \Delta\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(k) + \Delta\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_p(k) + \Delta\mathbf{u}(k))$$

$$\cong \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(k), \mathbf{u}_p(k)) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(k) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}_p(k) + \Delta\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_p(k) + \Delta\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_p(k) + \Delta\mathbf{u}(k))$$

$$\cong \mathbf{h}(\mathbf{x}_p(k), \mathbf{u}_p(k)) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(k) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(k)$$

Je to jako u spojitéch modelů: čas je sice diskrétní, ale hodnoty jsou spojité (kontinuum)

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{x}(k+1) &\cong \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(k) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(k) \\ \Delta\mathbf{y}(k) &\cong \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{x}(k) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)} \Delta\mathbf{u}(k)\end{aligned}$$